

## PRESENTACION

La matemática, como lenguaje simbólico, ha evolucionado a lo largo de muchos siglos. Se plantearon en un principio los problemas matemáticos utilizando el lenguaje cotidiano disponible ( 20 siglos antes de la era cristiana ) , pasando por el empleo de construcciones geométricas ( 5 siglos antes de la era cristiana ) , volviendo al uso del lenguaje cotidiano pero introduciendo abreviaturas ( 10 siglos después de la era cristiana ) y alcanzando la madurez ( simbolismo propio ) hasta hace dos siglos.

Actualmente el lenguaje matemático es utilizado por la física, química , informática y otras ciencias para expresar sus objetos de estudio y las relaciones entre ellos mediante expresiones funcionales y ecuaciones fundamentales específicas.

Lo significativo de tales expresiones ( funciones y ecuaciones básicas ) es el de emplear números tanto para representar los objetos de estudio como también sus propiedades. Por ejemplo, tres números se emplean para representar un paralelepípedo y un número para representar su volumen; de igual manera, tres números se emplean para representar la ubicación de un punto en el espacio y un número para representar el valor de la temperatura en ese punto. Las relaciones funcionales adquieren una " interpretación " o significado en cada ciencia de acuerdo al significado atribuido a los números.

La asignatura de Cálculo II, o Cálculo a varias Variables; tiene tres componentes temáticos:

i) Estudio de objetos geométricos en el espacio, empleando el álgebra, gracias al uso de un sistema de coordenadas. Este estudio se facilita con el empleo del concepto de vector; lo que permite mirar a los objetos geométricos como generados por partículas en movimiento. El papel que desempeñan los objetos geométricos en la asignatura es el de servir como medios de ayuda para la comprensión de los otros dos temas de la materia ( derivación e integración ).

ii) La derivación de funciones a varias variables, esto es; el estudio de las relaciones entre las variaciones en cada una y/o todas las variables independientes con las variaciones ( o impacto) que ocasionan en las dependientes. Según la interpretación que se dé a las variables utilizadas, las técnicas del cálculo diferencial permiten resolver diferentes problemas fundamentales.

iii) El cálculo integral,esto es; la medición de magnitudes geométricas y/o físicas de los objetos de estudio mediante un proceso de descomposición ( desintegración ) en elementos " infinitesimales " seguido de un proceso de medición en cada elemento y luego de sumación de esas medidas para obtener la magnitud total asociada al objeto.

Para la comprensión ( o apropiación conceptual ) de los temas mencionados por el estudiante, es imprescindible la realización de varios y variados ejercicios que se refieran a los conceptos que debe aprehenderse. Este documento tiene el propósito de promover esa ejercitación.

Las críticas y sugerencias de los actores del proceso de aprendizaje a este cuaderno; permitirán su mejoría y evolución hasta lograr convertirse en un medio y ayuda importante en la comprensión de los conceptos de estudio.

## VECTORES

*Un sistema de coordenadas es una manera de ubicar puntos mediante números. Para ubicar puntos en el plano se requieren dos números ; y para ubicar un punto en el espacio se requieren tres números.*

*El propósito de emplear un sistema de coordenadas es el de representar los objetos geométricos, es decir conjuntos de puntos; mediante relaciones algebraicas o sistemas de ecuaciones. Esta técnica ha resultado ser una pieza esencial en el desarrollo tecnológico y científico en el que actualmente nos encontramos.*

*Si bien el conjunto de pares o tripletas de números, que representan puntos no se pueden operar algebraicamente ( sumar, por ejemplo ); luego de unos dos siglos de la creación del concepto de sistemas de coordenadas ha sido posible también asociar a magnitudes físicas ( como el desplazamiento, velocidad, fuerza, etc. ) tripletas de números reales con los cuales sí es posible realizar operaciones algebraicas como la suma de manera que estas operaciones tengan un significado que corresponda a relaciones fundamentales que efectivamente se dan entre las magnitudes físicas. Estas tripletas, con las que se realizan operaciones, se denominan vectores. En general, las  $n$  - uplas de números reales denominados puntos representan objetos con los que se trabaja en el desarrollo de una temáticas; mientras que las  $n$  - uplas denominadas vectores representan características o propiedades geométricas y/o físicas de aquellos objetos con los que se trabaja.*

### COORDENADAS CARTESIANAS

*El sistema de coordenadas más empleado es el denominado sistema cartesiano en honor a su creador alrededor del año 1600. En el plano, los pares de números ubican puntos, mientras que las figuras denominadas curvas son representadas por una ecuación con una o dos variables. En cambio en el espacio, los puntos son ubicados por tripletas de números, los objetos geométricos denominados superficies se representan algebraicamente mediante ecuaciones con una, dos o tres variables. Las curvas que resultan geométricamente de la intersección de dos superficies, son representadas por el sistema de ecuaciones correspondientes a dichas superficie.*

1. En el plano , en el sistema cartesiano, representar gráficamente los puntos cuya ordenada vale 5
2. En el plano , en el sistema cartesiano, representar gráficamente los puntos cuyo producto de coordenadas vale 0
3. En el espacio , en el sistema de coordenadas cartesianas , representar gráficamente los puntos cuya cota vale 0
4. En el espacio , en el sistema de coordenadas cartesianas , representar gráficamente los puntos cuya abscisa y ordenada son iguales
5. Qué propiedad algebraica caracteriza a los puntos del espacio que se hallan a distancia 10 del plano  $XY$  ?

## VECTORES

Con los vectores se pueden realizar dos operaciones: la suma de vectores, que visualmente corresponde a la ley del paralelogramo. Si los dos vectores representan dos desplazamientos consecutivos, entonces la suma representa el desplazamiento total. Otro caso importante es que cuando se "suma" un punto con un vector, significa que el punto se desplaza (por acción del vector) a otro punto cuya ubicación es justamente el resultado obtenido por la "suma". La otra operación es la de un número con un vector, siendo el resultado un vector que mantiene su dirección (la recta donde el vector yace) pero puede quedar ampliado o reducido e incluso cambia de sentido cuando el número es negativo

6. Sean  $A = (1, -2)$ ,  $B = (-1, 3)$  y  $C = (0, 4)$ ; calcular y representar gráficamente las operaciones que se indican. En cada caso explicar su significado contextual en términos de puntos y vectores *desplazamiento*  
a)  $A + B$  b)  $A - B + C$ .
7. Sean  $A = (1, 4, -1)$ ,  $B = (2, 5, 4)$  y  $C = (0, 4, 0)$ ; calcular y explicar su significado : a)  $A + C$ . b)  $2A - B + 2C$ .
8. Determinar el vector desplazamiento  $V$  que desplaza el punto  $(3, 0, -5)$  al punto  $(0, 0, 10)$
9. Qué vector desplaza el punto  $P_1 = (x_1, x_2, x_3)$  al punto  $P_2 = (y_1, y_2, y_3)$

## PARALELISMO

Dos rectas, sea en el plano o en el espacio, se dicen paralelas cuando no se cortan pero tienen la misma dirección. Visualmente se dice que dos vectores son paralelos cuando están ubicados o yacen sobre la misma recta o rectas paralelas. Para el manejo algebraico, la característica que determina dos vectores paralelos es que uno de ellos debe ser igual al otro multiplicado por una constante.

10. Indicar cuáles de los siguientes pares de vectores son paralelos y en tal caso, si tienen o no el mismo sentido; hacer la representación gráfica. a)  $(1, 1)$  y  $(2, 2)$ ; b)  $(2, 4)$  y  $(4, 2)$ ; c)  $(5, 7, 3)$  y  $(-15, -21, -9)$ .
11. Expresar el vector  $P = (8, 4)$  como suma de dos vectores paralelos respectivamente a los vectores  $U = (1, 1)$  y  $V = (-2, 4)$

## MODULO

Si un vector representa a un vector desplazamiento, visualmente se entiende por su módulo al "tamaño" de la flecha y por tanto su significado es que ese tamaño es justamente la distancia entre el punto inicial y el punto final en el movimiento descrito por dicho vector desplazamiento.

12. Determinar el módulo del vector desplazamiento que desplaza el punto  $(0, 4)$  hasta  $(4, 1)$ . Indique el significado de su módulo

13. Determinar todos los puntos que se hallan a distancia 15 del punto  $(2, 2)$  en dirección del vector  $(4, -3)$
14. Determinar qué distancia debe recorrer una partícula ubicada en el punto  $(0, 0, 5)$  en dirección del vector  $(1, 2, 2)$  hasta lograr alcanzar un punto de cota 35
15. Si  $A = (1, 2, 3)$  y  $B = (3, 1, 2)$ , hallar un vector unitario  $C$  paralelo al vector a)  $A + B$ ; b)  $-A + 3B$ .
16. Si  $A = (3, 0, 4)$  y  $B = (2, -1, -3)$ , calcular la longitud o módulo de a)  $A$ , b)  $A + B$ , c)  $3A - \frac{1}{2}B$  y d)  $\frac{A}{|A|} + \frac{B}{|B|}$ . En cada caso explicar el significado del valor encontrado
17. Calcular la distancia entre los siguientes pares de puntos a)  $(1, 1)$  y  $(2, -2)$  b)  $(1, -1, 8)$  y  $(1, 2, 3)$
18. Dados los puntos  $(4, 0, 0)$ ,  $(0, 8, 0)$  y  $(0, 0, c)$ , determinar el valor de  $c$  de manera que el triángulo formado por dichos puntos sea equilátero

### PRODUCTO ESCALAR Y ORTOGONALIDAD

*Un problema básico en geometría es medir el ángulo que determinan al cortarse dos rectas. En realidad, al cortarse dos rectas determinan dos ángulos que son suplementarios. El Teorema de los Cosenos de la geometría euclidiana, que da el ángulo determinado por dos lados de un triángulo en función de las longitudes de los lados del triángulo; permite evaluar dicho ángulo en un sistema de coordenadas mediante una operación (denominada producto escalar) entre dos vectores perteneciendo cada uno a una recta dividido entre los módulos de tales vectores.*

*Una situación especial resulta cuando los vectores o rectas que los contienen son perpendiculares; se tiene que el producto escalar cero es equivalente a que se tenga visualmente o geométricamente esa situación.*

19. Determinar todos los pares ortogonales entre los vectores  $A = (4, 1)$ ,  $B = (2, -8)$ ,  $C = (2, -2)$ ,  $D = (-1, 4)$  Representarlos gráficamente.
20. Hallar todos los vectores de  $R^2$  de la misma longitud que  $A$  y ortogonales a  $A$ , siendo: a)  $A = (1, 2)$ ; b)  $A = (2, -1)$ ; c)  $A = (-2, 8)$ ; d)  $A = (0, 0, 1)$ .
21. a) Encontrar un vector  $X$ , distinto de cero, que sea ortogonal a  $(1, 5, -1)$ . b) Describe cómo están ubicados geométricamente todos los vectores perpendiculares a  $(1, 5, -1)$  si ubicamos su punto inicial en el origen de coordenadas
22. a) Encontrar un vector  $X$ , distinto de cero, que sea ortogonal a  $(1, 5, -1)$  y a  $(2, 1, 2)$ . b) Describe cómo están ubicados todos los vectores  $X$  del inciso anterior, si ubicamos su punto inicial en el origen de coordenadas

23. Calcular la proyección del vector  $A$  en la dirección de  $B$ , siendo: a)  $A = (3, 8)$ ,  $B = (2, 0)$ ; b)  $A = (5, -8)$ ,  $B = (1, 1)$ ; c)  $A = (1, 2, -3)$ ,  $B = (1, 0, 1)$
24. Una partícula se mueve en línea recta desde el punto  $(0, 5)$  hasta  $(10, 15)$ . Si los rayos de luz caen perpendicularmente a la recta que pasa por los puntos  $(0, 1)$  y  $(1, 0)$ , calcular la distancia que recorre la sombra que proyecta la partícula sobre la recta.
25. Determinar el ángulo entre las diagonales del cuadrilátero de vértices  $(0, 5)$ ,  $(5, 10)$ ,  $(15, 0)$  y  $(8, -4)$
26. Determinar el menor de los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son los puntos  $(2, -1, 1)$ ,  $(1, -3, -5)$  y  $(3, -4, -4)$ .
27. Una partícula viaja en línea recta desde el punto  $(0, 0, 5)$  hasta  $(20, 20, 10)$  y otra partícula viaja en línea recta desde el punto  $(15, 40, 0)$  hasta el punto  $(0, 4, 20)$ , determinar el ángulo que forman al cruzarse las sombras de sus trayectorias que se mueven en el plano del piso ( $z = 0$ ) ( Los rayos de luz inciden verticalmente en el piso )

### PRODUCTO VECTORIAL

*Otro problema básico en geometría es el de levantar en el espacio una recta perpendicular a un plano. Si una recta es perpendicular a un plano, es perpendicular a toda recta contenida en el plano. Empleando este hecho, se eligen dos vectores cada uno contenido en una recta del plano; y para determinar la recta perpendicular se busca un vector contenido en dicha recta. Se debe observar que el vector buscado debe ser perpendicular a los dos vectores del plano. Esa condición permite solucionar el problema y se obtiene una operación entre dos vectores denominado su producto vectorial que permite obtener un vector perpendicular a los dos.*

28. Sean  $A = (1, 2, -3)$ ,  $B = (1, -1, 0)$  y  $C = (-1, -2, 1)$ ; calcular:
  - a)  $A \times B$ ; hacer un bosquejo gráfico
  - b)  $A \times A$ ; qué interpretaciones se puede dar al resultado ?
  - c)  $A \times (B \times C)$ , explicar o justificar que este vector *yace* en el plano formado por  $B$  y  $C$
29. Tres vértices de un paralelogramo son los puntos  $A = (1, 0, 1)$ ,  $B = (-1, 1, 1)$  y  $C = (2, -1, 2)$ ; hallar todos los puntos que pueden ser el cuarto vértice del paralelogramo. Qué relación hay entre las áreas de los distintos paralelogramos determinados ?
30. Calcular el área del triángulo de vértices: a)  $(5, 0)$ ,  $(8, 4)$  y  $(1, -1)$ ; b)  $(a, 0, 0)$ ,  $(0, b, 0)$  y  $(0, 0, c)$ .

### PROBLEMAS VARIOS

31. Si las diagonales de un paralelogramo son los vértices  $(-1, 1)$  y  $(5, 1)$ , hallar la longitud de los lados del paralelogramo.
32. Si una partícula se mueve 10 unidades en la dirección y sentido del vector  $(3, 4)$  y luego 15 unidades en la dirección y sentido opuesto al vector  $(-6, 8)$ , a qué distancia de su posición inicial se halla a la conclusión de su desplazamiento ?
33. Si las diagonales de un paralelogramo son los vectores  $A$  y  $B$ , determinar la relación entre el área del paralelogramo definido por  $A$  y  $B$  y el área del paralelogramo inicial
34. Encontrar el ángulo que forman las diagonales de un cubo.
35. Mostrar que si los vértices  $A$  y  $B$  en el plano no son paralelos, entonces la igualdad
 
$$xA + yB = 0$$
 implica  $x = y = 0$ .
36. Sean  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  los vértices de un cuadrilátero y  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  y  $S$  los puntos medios de cada lado respectivamente, mostrar que: a)  $PQRS$  es un paralelogramo; b) el perímetro de  $PQRS$  es igual a la suma de las longitudes de las diagonales de  $ABCD$ .
37. Mostrar que las diagonales de un paralelogramo se bisectan.
38. Mostrar que las diagonales de un cuadrado son perpendiculares entre si.
39. Mostrar que el triángulo cuyos vértices están en los extremos de un diámetro de una circunferencia y sobre la circunferencia es triángulo rectángulo.
40. Mostrar que el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equidistante a los tres vértices.
41. Si  $ABCD$  es un paralelogramo, mostrar que  $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$ .

## PRACTICA # 2

### GEOMETRIA ANALITICA DEL ESPACIO

#### LA RECTA

*Dos puntos en el espacio determinan una única recta. El manejo algebraico de los objetos geométricos se realiza mediante el manejo de sistemas de ecuaciones o de funciones. Se observa que cualquier punto de la recta ( como tripleta de números ) se puede determinar mediante el desplazamiento de un punto fijo de la recta, según un vector desplazamiento paralelo al vector desplazamiento que se determina a partir de dos de los puntos de la recta. De esa manera, se obtiene un sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas. Dando valores reales a una de las variables, digamos  $t$  , se obtienen valores para las variables  $x$  ,  $y$  ,  $z$  que dan un punto de la recta correspondiente a ese valor de  $t$ .*

*En el espacio dos rectas pueden interceptarse, y si no se cortan pueden ser paralelas ( esto es, tienen la misma dirección ) o alabeadas ( no se cortan y tienen distintas direcciones.*

1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto  $P_0$  con vector direccional  $V$ , cuando: a)  $P_0 = (-1, 1, 2)$ ,  $V = (1, 1, 1)$ ; b)  $P_0 = (5, 3, -2)$ ,  $V = (2, -3, 2)$ . En cada caso determinar los puntos donde la recta intersecta a los planos coordenados
2. Hallar la posición relativa entre las rectas  $L_1$  y  $L_2$ .  $L_1$  pasa por los puntos  $(0, 0, 0)$  y  $(1, 1, 1)$ ;  $L_2$  pasa por  $(8, -3, 2)$  y  $(5, 0, 0)$ . ( paralelas, se cortan alabeadas )
3. Calcular la distancia del punto  $P_1$  a la recta dada: a)  $P_1 = (1, 1, 1)$  ;  $X = (1, 2, -1) + t(3, 4, 1)$ . b)  $P_1 = (0, 0, -1)$  ;  $X = (1, -0, -1) + t(1, 2, 3)$ .
4. En el ejercicio anterior , determinar en cada caso el punto más próximo a  $P_1$ .
5. Hallar el punto simétrico de  $P = (0, 0, 5)$  respecto de la recta que pasa por  $(4, 0, 0)$  y  $(0, 8, 0)$
6. Hallar los ángulos que forma la recta  $x = t$  ,  $y = 2t$ ,  $z = t$  con los ejes coordenados.
7. Mostrar que las siguientes rectas forman un triángulo rectángulo en el espacio:  $X = (1, 5, -3) + t(1, -1, 5)$  ;  $X = (3, 6, 1) + t(1, 2, -1)$  ;  $X = (1, 2, 3) + t(2, 1, 4)$ .
8. Calcular la distancia entre las siguientes rectas: a)  $X = (1, 3, 2) + t(1, -1, 0)$  y  $X = (0, 1, 2) + t(4, 1, 1)$ . b)  $x = t$  ,  $y = 2t$  ,  $z = 3t$  y  $x = 1 - t$  ,  $y = 2 + 2t$ ,  $z = 1 - 3t$ .

#### EL PLANO

*Tres puntos no colineales, es decir que no pertenecen a una misma recta, determinan un único plano. La ecuación algebraica correspondiente a un*

plano se obtiene considerando que un vector perpendicular al plano es justamente perpendicular a cualquier vector ubicado en el plano. Se determina mediante el producto vectorial un vector perpendicular al plano, y luego; el vector que une un punto fijo del plano con un punto cualquiera  $(x, y, z)$  es perpendicular al vector anteriormente mencionado.

Dos planos dados pueden intersectarse formando una recta, o si no se cortan; se dice que son paralelos. Se reconoce que dos planos son perpendiculares cuando sus vectores perpendiculares son paralelos.

9. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos:  $P_0 = (7, 2, 3)$  ,  $P_1 = (4, 5, 6)$  ,  $P_2 = (-1, 0, 1)$ . Determinar los puntos donde intersecta a los ejes coordenados .
10. Hallar la distancia del punto  $P$  al plano dado: a)  $P = (0, 0, 0)$  ; plano  $x + 2y - 2z = 0$  . b)  $P = (4, 1, 3)$  ; plano  $x + y + z = 6$ . En cada caso determinar el punto del plano que se halla más cerca de  $P$ .
11. Hallar el punto simétrico de  $P = (0, 0, 5)$  respecto del plano que pasa por  $(4, 0, 0)$  ,  $(0, 0, 10)$  y  $(0, 8, 0)$
12. Calcular el punto más próximo al origen del plano  $ax + by + cz + d = 0$  ( los coeficientes son distintos de cero )
13. Determinar la ecuación de la recta que resulta de la intersección de los planos  $x + y = 10$  ,  $x + z = 10$

### PROBLEMAS ENTRE RECTAS Y PLANOS

14. Determinar el punto donde la recta que pasa por  $(1, 3, 1)$  y es ortogonal al plano  $3x - 2y + 5z = 15$ , intersecta a dicho plano.
15. Determinar la distancia al origen de la recta que resulta de la intersección de los planos  $x + z = 5$  ,  $y + z = 5$
16. Encontrar la ecuación del plano que pasa por  $(1, 2, -3)$  y contiene a la recta  $X = (1, 1, 1) + t(5, -2, 3)$ .
17. Hallar el punto simétrico de  $(1, 2, 3)$  respecto del plano  $x - y + 2z - 6 = 0$ .
18. Mostrar que la distancia  $d$  del punto  $P_1$  a la recta  $X = P_0 + tV$  está dada por:

$$d = \left| (P_1 - P_0) \times \frac{V}{|V|} \right|$$

19. Mostrar que la distancia  $d$  entre los planos paralelos  $ax + by + cz = d_1$  ,  $ax + by + cz = d_2$  está dada por

$$d = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



20. Dados los puntos  $P(2, 1, 3)$ ,  $Q(1, 2, 1)$ ,  $R(-1, -2, -2)$  y  $S(1, -4, 0)$ , hallar la mínima distancia entre las rectas  $PQ$  y  $RS$
21. En el ejercicio anterior determinar los dos puntos ( uno de cada recta ) que se hallan más próximos

### **SUPERFICIE ESFERICA**

Las superficies son objetos geométricos, es decir; conjunto de puntos del espacio que " localmente " son semejantes a un plano. Lo anterior, quiere decir que si en un punto de la superficie se considera una " muy pequeña " región; resulta difícil distinguirla de una región plana.

*Una superficie empleada en la geometría y en la física es aquella cuyos puntos tienen la siguiente propiedad: cada uno de los puntos se halla a una distancia constante  $R$  de un punto fijo denominado centro de la superficie. Es significativo el hecho de que las ecuaciones de las rectas y los planos son ecuaciones lineales ( variables a lo más con exponente 1 ); mientras que en la ecuación de la superficie esférica todas las variables figuran con exponente cuadrado; es decir es una ecuación no lineal.*

*Es natural suponer que la resolución de ecuaciones no lineales es más complicado que la resolución de sistemas lineales; lo que efectivamente es verdadero .*

22. Determinar el punto de la superficie  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 8z - 1 = 0$  que se halla más lejos del origen de coordenadas .
23. Determinar , para la superficie esférica del anterior ejercicio, si el punto  $(2, 4, 6)$  se halla dentro , sobre o fuera de la superficie esférica .
24. Hallar el polo norte de la superficie esférica  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8z - 5 = 0$
25. Determinar el punto de menor cota de la superficie esférica de centro el origen y tangente al plano  $x + 2y + 4z - 8 = 0$
26. Dada la superficie esférica de centro  $(0, 0, 6)$  y radio  $r = 6$  ; hallar la ecuación del plano paralelo al plano  $z = 0$  que al interceptarla determina una circunferencia de radio 2.

### **OTRAS SUPERFICIES**

*Las superficies son objetos geométricos muy útiles entre otras cosas porque ayudan al desarrollo de los conceptos de derivadas parciales y el de integración múltiple. En realidad, la derivación parcial y la integración múltiple resuelven problemas relacionados con ciertas características geométricas y/o físicas de los objetos geométricos.*

*Dos familias de superficies son muy utilizadas en el cálculo a varias variables: las superficies cilíndricas y las superficies de revolución. De manera particular, se puede indicar que una superficie cilíndrica se genera desplazando una curva plana ( contenida en un plano ) a lo largo de una dirección. Mientras que una superficie de revolución se genera haciendo*

girar una curva plana alrededor de un eje o recta contenido en el mismo plano

Aparte del sistema cartesiano de coordenadas, existen otras maneras de ubicar puntos tanto en el plano como en el espacio mediante pares y tripletes de números reales respectivamente.

El sistema de coordenadas polares ubica un punto del plano mediante su distancia a un punto fijo llamado polo y el ángulo que forma el segmento que une el punto con el polo respecto de una recta fija llamada eje polar.

El sistema de coordenadas cilíndricas en el espacio ubica un punto mediante las coordenadas polares de su proyección ortogonal en un plano y su "altura" respecto de dicho plano. El sistema de coordenadas esféricas ubica un punto del espacio mediante su distancia a un punto fijo y dos ángulos; uno respecto de un eje perpendicular a un plano y otro ángulo: el formado por su proyección en el anterior plano y una semirrecta de dicho plano.

Dado un objeto geométrico, el sistema de ecuaciones que lo representan varía de acuerdo al sistema de coordenadas empleado. Debido a lo anterior, el empleo de uno u otro sistema de coordenadas se realiza de acuerdo a la simplicidad y claridad algebraica y conceptual que se obtiene al emplearlo

27. Bosquejar el gráfico de las superficies cilíndricas :  
 a)  $y = x$  . b)  $y = x^3$  . c)  $y = \cos x$   
 d)  $z = \frac{1}{x}$  . e)  $z = \frac{1}{y}$  . f)  $y^2 + z^2 = 1$
28. Hallar la ecuación de la superficie de revolución originada por la rotación de la curva  $z = 4y$  ,  $x = 0$  ; alrededor del eje  $z$ .
29. Hallar la ecuación de la superficie de revolución originada por la rotación de la curva  $z = 4y^2$  ,  $x = 0$  ; alrededor a) del eje  $z$ . b) del eje  $y$ .
30. Qué curva determina al intersectarse las superficies :  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  , y  $x^2 + y^2 = a^2$  . (  $0 < a < R$  ).
31. Graficar las siguientes curvas planas cuyas ecuaciones están dadas en coordenadas polares :  
 a)  $\rho = 2(1 - \cos \theta)$  b)  $\rho^2 = 4 \cos 2\theta$  , c)  $\rho = 2 \tan \theta \sin \theta$  d)  $\rho = \theta$
32. Determinar las ecuaciones de las siguientes superficies en a) coordenadas cilíndricas . b) coordenadas esféricas .  
 a)  $x^2 + y^2 = 4$  . b)  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  . c)  $z^2 = x^2 + y^2$

### **PRACTICA # 3**

### **CURVAS EN EL ESPACIO**

*Una curva en el espacio se lo puede considerar como el conjunto de puntos que resulta al intersectar dos superficie en el espacio. Esta manera da una visión estática del objeto; pero a veces interesa mirar a una curva de una manera dinámica, como el resultado de los puntos que se van generando al moverse una partícula en el espacio. Este modo, añade a una curva un sentido de recorrido y la noción de "rapidez" al movimiento que se realiza.*

*Esta última manera de considerar, modernamente presenta a una curva como una función donde tres variables ( las que dan la posición de la partícula ) dependen de una variable ( el tiempo o instante en el que se halla la partícula en la posición indicada ).*

#### **TRAYECTORIAS**

*La secuencia de posiciones que va tomando una partícula en su movimiento genera lo que se conoce como trayectoria de la partícula; tiene sentido y rapidez de recorrido. Dos problemas básicos en esta situación son el de determinar la velocidad ( vector ) de la partícula y la longitud de la trayectoria entre dos instantes de tiempo. El primer problema da lugar al concepto de derivada y el segundo al de una integral a lo largo de una curva.*

*Debido a las limitaciones de representar puntos del espacio en el plano u hoja de papel, y a la necesidad de mostrar una gran cantidad de puntos de la trayectoria para visualizar una imagen aproximada de la trayectoria; en general en este aspecto conviene emplear paquetes informáticos.*

Describir gráficamente las trayectorias de las siguientes curvas:

1.  $f(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$  ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .
2.  $f(t) = (\sin 2t, \cos 2t)$  ,  $0 \leq t \leq \pi$ .
3.  $f(t) = (t, t)$ .
4.  $f(t) = (-t, t)$ .
5.  $f(t) = (t, \cos t, \sin t)$ .
6.  $f(t) = (1, t, t^2)$ .

#### **DERIVADAS**

*El concepto de derivada se origina a causa de la necesidad de estudiar la variación que sufre la variable o variables dependientes debido u originada por la variación ocasionada en la variable o variables independientes. Los conceptos más importantes empleados en el área de las ciencias y la tecnología están definidos en términos de variaciones y por tanto los problemas centrales se refieren a determinar cualitativa y cuantitativamente el efecto que causan las variaciones de las variables independientes en la dependientes..*

*Desde un punto más global, la derivada redulta ser una función que proviene ( o deriva, de ahí su nombre ) de una función original; que por ese aspecto permite comprender más profundamente a la función original*

Encontrar las derivadas de las siguientes curvas en el valor de  $t$  indicado ; y representar el vector derivada en el punto correspondiente junto a la gráfica respectiva :

7.  $f(t) = (t, t - 1)$  ,  $t = 4$ .
8.  $f(t) = (t^2, t^3)$  ,  $t = 2$
9.  $f(t) = (a \cos t, b \sin t)$ .  $t = \pi$

### **RECTA TANGENTE**

*En la interpretación de que una curva define la posición o trayectoria de una partícula en el espacio en función del tiempo, la derivada de la función en un instante dado representa el vector velocidad de la partícula en dicho instante. Su módulo es la rapidez, su sentido es el el sentido de la trayectoria y su dirección es la de la recta, denominada recta tangente a la curva en ese instante; y da la trayectoria de la partícula en el caso de que la fuerza total actuando sobre la partícula se redujera a cero.*

Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto indicado. Realize la gráfica respectiva

10.  $f(t) = (\cos t, \sin t)$  en  $(0, 1)$ .
11.  $f(t) = (2t, t^2)$  en  $(1, 2)$ .
12.  $f(t) = (t, t^3)$  en  $(1, 1)$ .
13.  $f(t) = (1 + t, 4 + 3t)$  en  $(0, 1)$ .
14. Determinar el o los puntos donde intersecta al plano  $x + 2y + 3z - 6 = 0$  , la recta tangente a la curva  $f(t) = (t + 1, t - t^2, t^3)$  en  $t = 1$ .
15. Determinar la ecuación de la recta tangentes a la curva determinada por la intersección del cilindro

$$x^2 + y^2 = 25$$

y el plano  $x + y + z = 5$ , en el punto  $(3, 4, -2)$ .

16. Encontrar la recta tangente a la curva  $f(t) = (t, 0, t^2)$  trazada desde el punto  $(0, -3, 4)$ .

### **VECTOR POSICION**

*La posición de una partícula puede estar dada como punto o también como vector: un vector especial, que tiene como punto inicial fijo el origen de coordenadas y punto final la ubicación del punto*

17. Determinar los instantes en que la curva  $f(t) = (2t^2, 1 - t, 3 + t^2)$  interseca al plano  $3x - 14y - z = 10$ .
18. Una partícula está viajando en una curva en el espacio exterior de tal manera que su posición en el tiempo  $t$  está dada por  $f(t) = (1 + t, t^2, -2t)$ . Pero en el tiempo  $t = 2$  la partícula deja la curva y se mueve en la línea tangente con velocidad constante. Dónde está la partícula en  $t = 4$ ?

### LONGITUD DE CURVA

*La longitud de una parte de una curva o trayectoria descrita por una partícula puede ser medida con diferentes instrumentos. Empíricamente, una manera sería superponer sobre la curva un alambre, luego rectificarlo (hacerlo recto) y medir la longitud con un instrumento de medida como el metro.*

*Sin embargo, uno de los propósitos del uso de un sistema de coordenadas es el de medir la longitud empleando simplemente operaciones algebraicas, básicamente sumas y multiplicaciones. De esa manera, es posible transferir el problema a un proceso enteramente computacional y realizable por la computadora.*

19. Calcular la longitud de  $f(t) = (2t, 4t)$  entre  $t = 1$  y  $t = 3$ .
20. Calcular la longitud de  $f(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$  desde  $(0, 0)$  hasta  $(2\pi, 0)$ .
21. Calcular la longitud de  $f(t) = (2t, t^2)$  desde el punto  $(2, 1)$  hasta el punto  $(6, 9)$ .
22. Encontrar la longitud de una vuelta de la hélice  $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$ .

**PRACTICA # 4**  
**FUNCIONES A VARIAS VARIABLES**

**FUNCIONES . CURVAS DE NIVEL**

*Las funciones denominadas a varias variables, varias variables independientes y una sola dependiente simbolizada por*

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

*en general traduce una situación física y/o geométrica. Por ejemplo, las  $n$  variables independiente representan la ubicación de un punto o las características numéricas que definen los objetos de estudio; mientras la variable dependiente da el valor de la característica de estudio de los objetos anteriores.*

*Por ejemplo, en la función  $z = xy$ ,  $(x, y)$  define la ubicación de los objetos de estudio ( en este caso puntos ) y  $z$  puede darnos el valor de la temperatura en el punto correspondiente  $(x, y)$ . El propósito del estudio podría ser comprender cómo se " distribuye " la temperatura en el plano ( cómo varía la temperatura en las diferentes regiones del plano).*

*Un procedimiento que permite ir comprendiendo la " distribución " de temperaturas es determinar las curvas del plano ( y en tres dimensiones , las superficies ) constituidas por todos los puntos que se encuentran a la misma temperatura ( isotermas ).*

*Las curvas o superficies constituidas por los puntos que toman el mismo valor para la función dada se denominan curvas y superficies de nivel  $c$ ; siendo  $c$  el valor que toman. Por ejemplo, la curva de nivel  $c$  se define como*

$$\{(x, y) \mid \text{puntos del dominio de la función y } f(x, y) = c\}$$

1. Si  $f(x, y) = xy - 1$  da la temperatura en el punto  $(x, y)$ , hallar los puntos donde la temperatura vale 0
2. Si  $f(x, y) = \frac{2x + y}{1 - xy}$  da la temperatura en el punto  $(x, y)$ , estudiar el comportamiento de la temperatura en puntos próximos al  $(0, 0)$  que se hallan cercanos horizontal y verticalmente

Graficar el dominio de las siguientes funciones temperatura y analizar el comportamiento de la temperatura en puntos cercanos al origen de coordenadas cuando una sola de las variables varía

3.  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 + y^2}$ .
4.  $f(x, y) = \ln(x + y)$ .
5.  $f(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$ .
6.  $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ .

$$7. f(x, y, z) = \sqrt{\frac{x + y + z - 1}{x^2 + y^2 + z^2 - 1}}.$$

Para cada una de las siguientes funciones graficar los conjuntos de nivel correspondientes a los valores dados de  $c$ .

8.  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ;  $c = 0, 1, 4, 9$ .
9.  $f(x, y) = xy$ ;  $c = 1, -1, 4, -4$ .
10.  $f(x, y) = y - x^2$ ;  $c = 0, 1, 2, -4$ .
11.  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ ;  $c = 0, 1, -1$ .
12.  $f(x, y, z) = x + y + z$ ;  $c = -1, 0, 1$ .
13.  $f(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $c = -2, 0, 2$ .

## LIMITE Y CONTINUIDAD

*Los conceptos matemáticos han ido evolucionando en el transcurso del tiempo, sobre todo motivados por la necesidad de resolver problemas cada vez más complejos y también por la idea de integrar conceptos más simples en otros más generales, más simples y más precisos.*

*Los conceptos de límite y continuidad se refieren a nociones de proximidad.*

*Una función, intuitivamente, se dice continua en  $P$  cuando elementos próximos a  $P$  tienen sus imágenes próximas a  $f(P)$ . La debilidad de esta idea es que es subjetiva. La noción de proximidad puede tener diferente significación para las personas. Por ello, dicho concepto ha tenido que ser enunciado de manera que sea independiente de los sujetos. Una definición objetiva a veces al convertirse en un enunciado preciso puede convertirse pedagógicamente en algo más difícil de comprender.*

*La definición moderna de continuidad se expresa de la siguiente forma: Una función se dice continua en un punto  $P$  de su dominio cuando para cualquier vecindad dada de  $f(P)$  ( esto es, puntos próximos alrededor de  $f(P)$  ) siempre es posible determinar una vecindad de dicho punto ( puntos alrededor de  $P$ , incluyendo  $P$  ) de manera que todos los puntos  $X$  de dicha vecindad tengan sus imágenes  $f(X)$  en la vecindad inicial dada de  $f(P)$*

*La idea de límite, es semejante a la anterior aunque más general.*

*Se dice que el límite de una función en un punto  $P$  es el número  $L$  cuando elementos próximos a  $P$  ( sin incluir a  $P$  ) tienen sus imágenes próximas a  $f(P)$ . La debilidad de esta idea es que es subjetiva, por lo que su definición precisa se realiza en términos de vecindades exactamente como para el caso de continuidad.*

*El mostrar que un número es el límite de una función en un punto  $P$ , requiere un manejo conceptual y computacional nada sencillo en un principio. Más*

*importante que ello, en un principio, es la técnica de determinar operativamente el límite calculando los valores de la función en puntos o sobre curvas que se hallan próximos al punto  $P$ .*

14. Hallar el límite de  $f(x, y) = x^3 - xy + y^3 + 3$  en  $(1, -1)$
15. Mostrar que  $f(x, y) = \frac{3x - 2y}{2x - 3y}$  no tiene límite en  $(0, 0)$
16. La función anterior en qué puntos no es continua ?
17. En qué puntos es continua y en qué puntos es discontinua la función  $f : R \rightarrow R$ , definida por  $f(x) = \frac{|x|}{x}$ .
18. En qué puntos es continua y en qué puntos es discontinua la función  $f : R^2 \rightarrow R$ , definida por  $f(x, y) = \frac{|x|}{y}$

### DERIVADAS PARCIALES

*Una de las maneras más importantes de "comprender" una función y determinar sus características más importantes es de estudiar el impacto o variación que causan las variaciones de las magnitudes independientes en las variables o magnitudes dependientes.*

*En el caso de una función con una variable dependiente y varias independientes, inicialmente es importante cómo varía la variable dependiente cuando solamente una de las variables independientes varía, permaneciendo todas las demás constantes. El concepto apropiado para ello es el de derivada parcial. El signo de la derivada parcial en un punto indica si la variable dependiente aumenta o disminuye la dependiente cuando ocurre un aumento o disminución pequeña en la independiente; mientras que el valor de la derivada parcial da cuantitativamente el impacto que sufre la variable dependiente ante una variación de una de las independientes; mientras las demás permanecen constantes.*

Calcular  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , en el punto  $(2, 1)$ ; en cada caso indicar el significado del valor encontrado

19.  $f(x, y) = xy + 3x^2 - y$ .
20.  $f(x, y) = x + y + 2\frac{y}{x}$ .
21.  $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ .

### DERIVADAS DIRECCIONALES

*Las derivadas parciales de una función permiten conocer la manera cómo varía la función a lo largo o dirección de uno de los ejes coordenados. Por ejemplo,  $\frac{\partial f}{\partial x}$  de una función de  $R^2$  a  $R$ , nos informa sobre la variación de la función cuando el punto del dominio se mueve en dirección del eje*



de las abscisas o eje  $x$ . Un problema importante es determinar cómo varía una función cuando el punto del dominio se mueve a lo largo de una recta cualquiera cuya dirección está dada por un vector  $v$ . El concepto que resuelve este problema es el de derivada direccional de una función en una dirección dada por un vector  $v$ . Este es un concepto más general que el de derivada parcial pues lo incluye como un caso particular. Sin embargo, la derivada direccional depende por completo de las derivadas parciales y evidentemente del vector  $v$ .

Calcular la derivada direccional de cada una de las siguientes funciones en el punto dado y en la dirección indicada.

22.  $f(x, y) = 1 - 2x^2 + 3y^2$  en  $(2, -1)$  en la dirección de  $V(3, 4)$ .
23.  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  en  $(1, 1, -2)$  en la dirección de  $V(2, -1, 2)$ .
24.  $f(x, y, z) = xyz$  en  $(1, 0, -1)$  en la dirección de la hélice:

$$c(t) = (t, \sin \pi t, \cos \pi t)$$

25. Calcular la derivada de  $f(x, y) = 5x^2 - 3x - y - 1$  en el punto  $(2, 1)$  en la dirección de la recta que une este punto con el punto  $(5, 5)$ .
26. Si  $f(x, y) = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$ , mostrar que en el punto  $\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$  la derivada direccional es igual a cero, en cualquier dirección (éste es un punto crítico de  $f$ ).
27. Si  $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$ , encontrar la dirección para la cual la derivada direccional en el punto  $(2, 1)$  es cero.
28. Si  $f(x, y, z) = 2xz - y^2$ , ¿En qué dirección la derivada direccional de  $f$  en el punto  $(1, 3, 2)$  es a) máxima?, b) es mínima? c) calcular dichos valores.

### DERIVADA SEGUN DEFINICION

Un concepto aún más general que el de derivada direccional es el de derivada o derivada total de una función. Se trata de responder a la pregunta sobre cómo varía la función cuando simultáneamente varían todas las variables independientes. Un resultado, como era de esperar, es que la variación total de la función depende completamente de cada una y todas las derivadas parciales. Así resulta que si bien tanto la derivada direccional como la derivada total generalizan el concepto de derivada parcial; operacionalmente su cálculo se reduce al cálculo de derivadas parciales.

De acuerdo a la definición hallar la derivada de:

29.  $f(x) = x^2 + x$ .
30.  $f(x, y) = x + 2y$ .
31.  $f(x, y) = xy$

$$32. f(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 3t \end{pmatrix}$$

$$33. f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y \\ xy \end{pmatrix}$$

### SIGNIFICADO DE LA DERIVADA

*El significado de la derivada en las diferentes variaciones conceptuales está dado por expresiones de la siguiente forma: por un lado está la variación sufrida por las variables dependientes y por otra la variación sufrida por cada una de las variables independientes. Ambas variaciones están relacionadas por un factor que es justamente la derivada de la función. La relación anterior entre las variaciones es mejor cuanto más pequeñas sean las variaciones en las variables independientes.*

Para los ejercicios que siguen tomar en cuenta las siguientes fórmulas

$$f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) \approx \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) h \quad , \quad (h \approx 0)$$

$$f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \approx \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) k \quad , \quad (k \approx 0)$$

$$f((x_0, y_0) + h\vec{v}) - f(x_0, y_0) \approx D_v f(x_0, y_0) h \quad , \quad (h \approx 0)$$

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \approx \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \quad , \quad (h \approx 0, k \approx 0)$$

34. Si  $y = x^3$  nos da el volumen de un cubo de lado  $x$ . a) cuál es el significado de  $\frac{dy}{dx} |_{x=2}$  en el contexto del significado de  $f$ ? . Comprueba tu afirmación . b) Para qué valor del lado  $x$ , a un aumento pequeño del lado se tiene un aumento en la misma cantidad - *pero en volumen* - en el valor de  $y$ ? . Comprueba tu afirmación.
35. Empleando derivadas calcular aproximadamente la variación de la función  $f(x) = x^4$  cuando el valor de  $x$  varía de  $x = 5$  hasta  $x = 5.003$
36. Empleando derivadas , calcular aproximadamente  $\sqrt[3]{26.8}$  ( emplee el hecho de que  $\sqrt[3]{27} = 3$  )
37. Cuánto varía aproximadamente el volumen de una esfera de radio 5 metros ,si el radio disminuye 2 cms. ? . ( El volumen de una esfera de radio  $r$  está dado por  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ .) . Emplee derivadas . Compruebe su afirmación
38. Empleando derivadas parciales calcule cuánto varía aproximadamente la distancia del punto (10,5) al punto (5,0) cuando (10,5) recorre hasta el punto (10.03,5) .
39. Empleando derivadas parciales calcule cuánto varía aproximadamente cuánto varía el volumen de un cono de radio inicial  $R = 4$  ms. y  $h = 6$  ms , si

- el radio disminuye 3 cm. y la altura aumenta 4 cms. a) emplee derivada direccional . b) emplee la derivada .
40. Sea  $f$  la función que a cada punto del plano  $(x, y)$  le asigna su distancia al punto  $(9, 0)$  . Una partícula que inicialmente se halla ubicada en el punto  $(0, 5)$ , se mueve una distancia de 0.02
- a) si su movimiento es hacia abajo , empleando derivadas parciales determine si ha aumentado o disminuído su distancia al  $(9, 0)$  y aproximadamente en cuanto
- b) si su movimiento ha sido en dirección y sentido de la gradiente en ese punto , determine si ha aumentado o disminuído su distancia al  $(9, 0)$  y aproximadamente en cuanto
41. Dada la función  $f(x, y) = x^2 - y^2 + 5x$  , calcular la derivada direccional en el punto  $(8, 4)$  en la dirección  $v = (3, 4)$  . Cuál el significado del valor obtenido ? . En qué dirección el valor de la derivada direccional es 1 ? . En qué puntos del plano la derivada direccional máxima es igual o mayor a 10 ?
42. Si la temperatura de una lámina poligonal de vértices  $(2, 2)$  ,  $(0, 8)$  ,  $(4, 12)$  ,  $(6, 6)$  ,  $(10, 0)$  y  $(4, -4)$  está dada en cada punto por la función  $T(x, y) = 3x - y + 6$  ; qué puntos se encuentran a temperatura de  $12^\circ$  ? . Qué punto o puntos se hallan a la menor temperatura ?.
43. La temperatura de un punto  $(x, y, z)$  del espacio está dada por  $T(x, y, z) = xy - 10z$  , cuánto varía la temperatura de una partícula si se mueve del punto  $(2, 3, 4)$  al punto  $(2.01, 3, 4.01)$  . a) Emplee derivadas direccionales .b) Emplee la Derivada.
44. Utilizando el significado del gradiente , calcular el punto del círculo  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 9$  donde la función  $z = 3x - y$  toma el mayor valor .
45. Determinar ( si existe ) la dirección en la que la derivada direccional de la función  $z = x - y^2$  en el punto  $(4, 3)$  vale 1 .Explique el significado de dicha derivada direccional .
46. Suponiendo que el planeta tierra fuera exactamente esférica , de radio 6400 Kms. , y un hombre de estatura igual a 1.75 metros recorriera toda la línea del Ecuador , determinar empleando derivadas la diferencia entre la distancia recorrida por la cabeza del hombre y la recorrida por sus pies .
47. Determinar la(s) dirección(es) donde la derivada direccional de la función  $f(x, y) = x^2 - 4y$  , en el punto  $(1, 1)$  vale 0 .
48. Si  $f(t) = (t^2, t)$  (  $t$  está en minutos ) da la posición de una partícula en el plano , y  $g(x, y) = \sqrt{x^2 + (y - 5)^2}$  da la distancia de un punto  $(x, y)$  al punto  $(0, 5)$  ; empleando derivadas determinar aproximadamente a qué

rapidez se está alejando la partícula respecto del punto  $(0, 5)$  cuando se encuentra ubicada en el punto  $(4, 2)$  .

49. Si la temperatura  $T$  en el punto  $(x, y)$  está dada por  $T(x, y) = x^2 + y^2$ ,  
 a) Graficar en el plano los puntos donde  $T = 0$ ,  $T = 1$ ,  $T = 2$ ,  $T = 4$ . b)  
 Calcular la derivada direccional de  $T$  en el punto  $(1, 1)$  y en la dirección  
 de cada uno de los ocho vectores  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  
 $(-1, -1)$ ,  $(0, -1)$ ,  $(-1, -1)$ . c) ¿En cuál de estas ocho direcciones aumenta  
 la temperatura con mayor rapidez?, ¿disminuye con mayor rapidez?, ¿no  
 cambia?. d) ¿En qué dirección del plano aumenta la temperatura con  
 mayor rapidez? y ¿en qué dirección disminuye con mayor rapidez?
50. Dada la función temperatura  $f(x, y) = x^2 - xy$  , calcular la derivada  
 direccional de  $f$  en el punto  $(5, 3)$  en las direcciones a)  $v = (3, 0)$  , b)  
 $v = (4, -3)$  , c)  $v = (-1, 1)$  . En cada caso indique el significado de cada  
 uno de los valores encontrados . Cuál es el valor de la mayor o más grande  
 derivada direccional que  $f$  puede tomar en  $(5, 3)$  ? .
51. Si una partícula inicialmente ubicada en  $(5, 3)$  se desplaza una distancia  
 de 0.1 en la dirección y sentido del vector  $v = (4, -3)$  , cuál será aproxi-  
 madamente el aumento o disminución de la temperatura ?
52. Para la función  $f(x, y) = x^2 - xy$  ( *temperatura en el punto  $(x, y)$*  ) , dibujar  
 los vectores gradiente en cada uno de los puntos siguientes :  $(1, 0)$ ,  $(2, 2)$  ,  
 $(3, 6)$  ,  $(0, 4)$  ,  $(-2, 2)$  ,  $(0, -4)$  ,  $(-3, -4)$  ,  $(0, -6)$  ,  $(2, -3)$  . De acuerdo a  
 su dibujo , indique en cuál de los puntos es mayor el aumento en dirección  
 de la gradiente.
53. Sea  $f$  la función que a cada punto del plano  $(x, y)$  le asigna su distancia a  
 la recta  $x = 0$  . a) Determinar la expresión algebraica de  $f$  . b) Calcular  
 la gradiente de  $f$  y explicar el significado de dicha gradiente en un punto  
 cualquiera . c) Si una partícula se halla en el punto  $(8, 4)$  , en qué dirección  
 y sentido debe moverse para que su derivada direccional valga 0.5 ?.
54. Dada la ecuación de una curva en el plano bajo la forma  $\phi(x, y) = 0$  ;  
 mostrar empleando el significado de gradiente que el vector  $\nabla\phi(x_0, y_0)$  es  
 un vector perpendicular a la curva dada en el punto  $(x_0, y_0)$  .
55. En base al ejercicio anterior hallar la ecuación de la recta *normal* o recta  
*perpendicular* a la curva  $y - x^2 = 0$  en el punto  $(2, 4)$ .
56. Dada la función temperatura  $f(x, y) = x^2 - xy$  , se tiene que una partícula  
 ubicada inicialmente en  $(4, 0)$  se mueve en la dirección de  $\nabla f(4, 0)$  , de-  
 terminar hasta qué punto de esa recta la función temperatura sigue au-  
 mentando
57. En el problema anterior , si la partícula se mueve en la misma dirección  
 del vector gradiente pero en sentido opuesto , determina el punto de esa  
 recta en el que la función sigue disminuyendo

58. Para la función temperatura anterior , en qué punto del rectángulo de vértices  $(5, 5)$  ,  $(15, 5)$  ,  $(15, 10)$  y  $(5, 10)$  el vector gradiente tiene el mayor módulo . En base a lo anterior , cuál es la propiedad del punto encontrado en términos de variaciones ? .
59. En el cuadrilátero de vértices  $(2, 2)$  ,  $(8, 6)$  ,  $(15, 0)$  y  $(9, -9)$  está definida la función temperatura por  $T(x, y) = 3x - 6y$ . empleando el gradiente , moviéndose en las direcciones de máximo aumento y máxima disminución determinar el los punto que se hallan a máxima temperatura y a mínima temperatura

### LA REGLA DE LA CADENA

*La denominada Regla de la Cadena aparece en el caso donde la función a derivar resulta ser la composición de otras dos funciones. La Regla de la Cadena da la relación entre las derivadas de las funciones componentes con la derivada de la función compuesta resultante.*

$$\begin{aligned}\text{Si } h &= g \circ f \\ Dh(P) &= Dg(f(P))Df(P)\end{aligned}$$

*Intuitivamente, la fórmula anterior expresa lo siguiente: Una variación en el dominio de la función  $f$  ocasiona una variación en las variables de su codominio; es decir , en las variables del dominio de  $g$ . La variación respectiva en el dominio de  $g$  ocasiona ( en cadena ) variaciones en las variables de l codominio de  $g$ . Se tiene que el producto de las variaciones parciales es igual a la variación completa ocasionada por las variables independientes iniciales.*

*Aunque parezca que la Regla de la Cadena se emplea sobre todo para calcular derivadas en el caso de composición de funciones; una de sus utilidades más frecuentes es más bien ser un pilar en las demostraciones de teoremas debido a que puede reducir un teorema referida a varias variables al caso de una sola variable.*

*La Regla de la Cadena produce una serie de fórmulas útiles sobre todo en la resolución de ecuaciones diferenciales, problemas relativos al estudio de la geometría de superficies ( geometría diferencial ) y en especial permite obtener los resultados más importantes para la determinación de los máximos y mínimos de una función .*

Empleando la Regla de la Cadena calcular las fórmulas correspondientes para

60.  $\frac{dy}{dt}$  , siendo  $y = y(x)$  ,  $x = x(t)$
61.  $\frac{dy}{dt}$  , siendo  $y = y(x)$  ,  $x = x(u)$  ,  $u = u(t)$
62.  $\frac{\partial z}{\partial r}$  , para  $z = z(x, y)$  ,  $x = x(r, s)$  ,  $y = y(r, s)$

63.  $\frac{dw}{dt}$  , para  $w = w(x, y, z)$  ,  $x = x(t)$  ,  $y = y(t)$  ,  $z = z(t)$
64. Si  $u = f(x - y, y - x)$  , demostrar que  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
65. Si  $u = x^3 f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x})$  , demostrar que :  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 3u$
66. Sea  $g(x, y) = f(x + y, x - y)$ , donde  $f$  es una función derivable de dos variables, digamos  $f = f(u, v)$ .Mostrar que:  $\frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} = (\frac{\partial f}{\partial u})^2 - (\frac{\partial f}{\partial v})^2$
67. Un rectángulo , inicialmente de base  $x = 10$  metros y altura  $y = 5$  metros , aumenta su base a una velocidad constante de 4 cm/seg. y disminuye su altura a una velocidad constante de 2 cm/seg. a) Expresar el valor del área del rectángulo en función del tiempo . b) En algún instante el área vale 40 m<sup>2</sup> ?. c) Determinar los instantes en que está aumentando el área y los instantes en que está disminuyendo . d) En base a tu respuesta anterior , cuál es el valor más grande que alcanza el área de dicho rectángulo ? .
68. Un recipiente de forma de cono invertido de radio basal  $x = 5$  metros y altura  $y = 20$  metros , inicialmente está lleno de agua . Si empieza a salir agua en el instante  $t = 0$  por el vértice a una velocidad constante de 2 litros por segundo . a) Escribir la función que da el volumen de agua en el recipiente en función del tiempo . b) Escribir la función que da la altura  $h$  del nivel del agua en función del tiempo  $t$  . c) Realice el gráfico de las funciones anteriores . d) Cuál es el significado de  $\frac{dh}{dt}$  en  $t = 10$  .? .
69. Una piscina de altura 5 metros y base 10 por 8 metros , inicialmente está lleno de agua . Debido a un orificio en el vértice sale el agua a una velocidad de 15 litros por segundo de manera constante .Determinar aproximadamente la velocidad a la que disminuye la altura del nivel del agua cuando la altura de dicho nivel es de 3 metros : i) por cálculo directo ( sin derivada ) . ii) empleando derivadas.

**PRACTICA # 5**  
**APLICACIONES DE LA DERIVADA**

*El cálculo de derivadas y la comprensión de su significado permiten resolver diferentes problemas: en la resolución de ecuaciones diferenciales cuando se realizan cambio de variables*

**TRANSFORMACION DE ECUACIONES**

1. Transformar la ecuación  $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + 5y = 0$  efectuando el cambio  $u = \ln x$ . ( Escribir la ecuación en términos de  $y, u$  )
2. Transformar la ecuación  $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x+y}$  efectuando el cambio  $z = \frac{y}{x}$ . ( Escribir la ecuación en términos de  $z, x$  )
3. Transformar la ecuación  $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x+y}$  efectuando el cambio a polares :  $x = \rho \cos \theta$  ;  $y = \rho \sin \theta$ . ( Escribir la ecuación en términos de  $\rho, \theta$  )
4. Mostrar que la ecuación  $x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} = 0$  se transforma en  $\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} = 0$ ; bajo el cambio  $x = e^r$ ,  $y = e^s$ .

**PLANO TANGENTE Y RECTA NORMAL**

*La forma de una superficie en una vecindad de un punto está determinado por su plano tangente. Un estudio más profundo de una superficie empleando el cálculo diferencial requiere de la determinación de diferentes elementos. El plano tangente y la recta normal son dos elementos complementarios que son simplemente una muestra del empleo de las derivadas en el estudio de la geometría de las superficies.*

Hallar la ecuación del plano tangente y de la recta normal a cada una de las siguientes superficies en el punto indicado

5.  $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ , en el punto  $(1, -2, 3)$ .
6.  $z = xy$ , en el punto  $(3, -4, 12)$ .
7.  $xz^2 + x^2y = z - 1$ , en el punto  $(1, -3, 2)$ .
8. Mostrar que la ecuación del plano tangente a la cuádrica trasladada  $ax^2 + by^2 + cz^2 + dx + ey + fz = g$  en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$  está dado por

$$ax_0x + by_0y + cz_0z + \frac{d}{2}(x_0 + x) + \frac{e}{2}(y_0 + y) + \frac{f}{2}(z_0 + z) = g$$

9. Aplicar el ejercicio anterior para hallar la ecuación del plano tangente a la superficie: a)  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2z = 0$  en  $(1, -1, 2)$ , b)  $x^2 - 3y^2 + z^2 + x - 3y + 7z = 2$  en  $(-1, 1, 1)$ .
10. Determinar la ecuación del plano tangente a la superficie  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$  y paralelo al plano  $x + 4y + 6z = 0$ .
11. Hallar la ecuación del plano tangente al elipsoide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ , en el primer octante, de tal modo que intercepte a los ejes coordenados a igual longitud del origen.

### MAXIMOS Y MINIMOS

*Una de las aplicaciones centrales del cálculo diferencial es la determinación de los valores máximos y mínimos de una función. Relativo a los valores máximos ( al igual que para los valores mínimos ) hay dos conceptos: el máximo global y el de máximo local.*

*Un máximo local es un valor, el mayor que toma la función, considerando únicamente una vecindad; mientras que el máximo global es el mayor valor que toma la función considerando todo su dominio. Conceptos semejantes se tienen respecto de mínimo global y local.*

*Se tienen varios teoremas o criterios que nos permiten resolver el problema de determinar máximos y mínimos de una función. En verdad, los resultados dependen ( como debe ser ) de la función, pero también de las características de su dominio. Por su importancia se detalla estos aspectos en un anexo al presente documento. Es recomendable una comprensión amplia acerca de este problema importante en diferentes áreas; problema que de manera más precisa se conoce como problema de optimización.*

Hallar los máximos y mínimos relativos a puntos silla:

12.  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 25$ .
13.  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ .
14.  $z = x^3 + y^3 + 3xy$ .
15.  $z = x^2 + 2xy + 3y^2$ .
16.  $z = x^2 + 2y^2 + 6xy - 6x + 10y + 5$ .
17.  $z = 2x^3 - 2x^2y + xy^2 - y^3 - 3x + 3y$ .
18.  $z = xy(2x + 4y + 1)$ .
19. Verificar que  $(0, 0)$  es un punto crítico de  $f(x, y) = (x - y^2)(2x - y^2)$  y determinar su naturaleza.



20. Si  $f(x, y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$ , mostrar que sobre toda recta que pasa por el origen, la función tiene un mínimo en  $(0, 0)$  y que sin embargo no existe mínimo relativo en  $(0, 0)$ . (Sug. Graficar los puntos donde  $f(x, y) > 0$  y  $f(x, y) < 0$ ).
21. Hallar los extremos de  $f(x, y) = x^3y^2(6 - x - y)$ .
22. Determinar el punto del rectángulo de vértices  $(5, 5)$ ,  $(20, 5)$ ,  $(5, 15)$  y  $(20, 15)$  que se halla a) más cerca del punto  $(0, 10)$ . b) más lejos del punto  $(0, 10)$
23. Determinar el punto del primer cuadrante ( los puntos  $(x, y)$  tal que  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  ) se se halla a) más próximo del punto  $(-5, 5)$ . b) más lejos del punto  $(-5, -5)$ .
24. Si en la lámina plana limitada por  $y = x^2$ ,  $y = 16$ , se tiene que en cada punto  $(x, y)$ , la temperatura está dada por  $T(x, y) = x^2 + y^2 - 48y$ ; determinar el o los puntos a máxima ( y a mínima ) temperatura . Existen aparte de los anteriores máximos y/o mínimos locales ?
25. Determinar las dimensiones del rectángulo de mayor área que se puede construir con 100 metros de alambre
26. Se desea construir una caja de base cuadrada . El precio del material con el que se construirá la base es de  $100 \frac{Bs}{m^2}$  y del material con el que se puede construir las cara laterales cuesta  $75 \frac{Bs}{m^2}$ . Determinar las dimensiones de la caja de mayor volumen que se puede construir con 1500 bolivianos
27. Hallar las dimensiones del cilindro que tenga volumen igual  $100 \text{ m}^3$ , de modo que en su construcción se emplee la menor cantidad de volumen : a) si el cilindro será contará con las dos tapas . b) si el cilindro , sólo tendrá una tapa
28. Determinar , de entre todas las rectas del plano de la forma  $y = ax + b$ , aquella para la cual la suma de los cuadrados de las distancias verticales a los puntos  $(0, 0)$ ,  $(4, 2)$  y  $(8, -4)$  sea : a) mínima . b) máxima
29. Determinar el rectángulo del primer cuadrante con lados apoyados en los ejes coordenados y uno de sus vértices sea un punto de la recta  $x + 4y = 20$  de manera que su área sea máxima
30. Un ciclista está girando en una pista circular de centro  $(8, 12)$  y de radio 4; determinar el punto de su trayectoria que se halla más cerca del origen de coordenadas
31. Una persona necesita adquirir 10, 12 y 12 unidades de las sustancias  $A$ ,  $B$  y  $C$  respectivamente . Un producto  $P_1$  contiene 1, 2 y 4 unidades de  $A$ ,  $B$  y  $C$  respectivamente por paquete ;y el producto  $P_2$  contiene

5 , 2 y 1 unidades Si el producto  $P_1$  cuesta el paquete a Bs 30 y el producto  $P_2$  cuesta también Bs. 30 . Determinar cuántos de cada uno de los paquetes debe comprar con el propósito de minimizar los costos y cumplir los requisitos ?

32. Una persona dispone de monedas de 5 y 2 bolivianos . Desea llevar consigo un total de 83 bolivianos . Determinar cuántas monedas de cada clase debe llevar de manera que la cantidad de monedas sea : a) máxima , b) mínima
33. Con un alambre de 12 metros de longitud se desea construir una figura de la forma siguiente

determinar las longitudes  $x$  , y el ángulo  $\theta$  de manera que el área sea máxima

34. Dado el triángulo de vértices  $(0,0)$  ,  $(10,20)$  y  $(40,0)$  , determinar : a) el o los puntos del triángulo equidistantes de los tres vértices . b) el o los puntos del triángulo tal que la suma de sus distancias al cuadrado a los vértices sea mínimo , ( máximo ) . c) el o los puntos del triángulo tal que la suma de sus distancias a los tres vértices sea mínima ( máxima )
35. La temperatura  $T(x,y) = x^2 + y^2 - 6x$  , está definida en cada punto  $(x,y)$  de la lámina rectangular de vértices  $(0,4)$  ,  $(8,4)$  ,  $(8,12)$  y  $(0,12)$ 
  - a) determinar qué *punto* de la lámina ( si existe ) , se halla a menor temperatura
  - b) determinar los mínimos locales de  $T$
36. Determinar el punto de la circunferencia de radio 5 y centro  $(0,5)$  que se halla a) más cerca del punto  $(4,3)$ . b) más lejos del punto  $(-4,-3)$ . En ambos casos justifique su respuesta
37. Determinar , de entre todas las rectas del plano de la forma  $y = ax + b$  , aquella para la cual la suma de los cuadrados de las distancias verticales a los puntos  $(0,1)$  ,  $(4,-3)$  y  $(8,0)$  sea : a) mínima . b) repita el problema anterior considerando la restricción  $0 \leq a \leq 1$  ,  $2 \leq b \leq 4$

### MAXIMOS Y MINIMOS CONDICIONADOS

Hallar los máximos y mínimos de las siguientes funciones sujetas a las restricciones que se indican.

38.  $f(x, y) = x^2 + y^2$  con  $x - y = 3$ .
39.  $f(x, y) = x + y$  con  $xy = 1$ .
40.  $f(x, y) = x + y^2$  con  $2x^2 + y^2 = 1$ .
41.  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  con  $3x + 2y - 7z = 5$ .
42.  $f(x, y, z) = x + y + z$  con  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ .
43.  $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$  con  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .
44.  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  con  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = x + 1$ .
45.  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  con  $x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ .
46.  $f(x, y, z) = xyz$  con  $x + y - z = 3$ ,  $x - y - z = 8$ .
47.  $f(x, y, z) = xyz$  con  $x + y + z = 5$ ,  $xy + yz + xz = 8$ .
48. Hallar una fórmula para la distancia más corta del punto  $(x_0, y_0, z_0)$  al plano  $ax + by + cz = d$ .
49. Hallar la mínima distancia del origen a la hipérbola  $7x^2 + 8xy + y^2 = 225$ .
50. Encontrar la distancia más corta entre dos puntos cualesquiera de las rectas  $x = 1 + 2t$ ,  $y = 3$ ,  $z = 5 - t$ ;  $x = 2 - 4t$ ,  $y = 8 + 3t$ ,  $z = 11 + t$ .
51. Determinar de todos los triángulos de igual perímetro  $2p$  el que tiene mayor área.
52. Calcular las dimensiones de un envase de lata cilíndrico (con una tapa) que debe contener un litro, de tal modo que su fabricación requiera la mínima cantidad de metal.
53. Calcular las aristas del mayor paralelepípedo rectangular que tiene 3 caras en los planos coordenados y un vértice en el plano  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ .
54. Determinar el paralelepípedo rectangular de máximo volumen y lados paralelos a los planos coordenados que puede inscribirse en el elipsoide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

### CALCULOS APROXIMADOS. CALCULO DE ERRORES

*Las derivadas dan aproximaciones a las variaciones sufridas por las variables dependientes ocasionadas por variaciones en las variables independientes. Este resultado permite calcular aproximadamente los valores finales*

que toma una función cuando se tiene la información de los valores iniciales, de las derivadas en el punto inicial y de las variaciones ocurridas en la variables independientes. Para ello, se utilizan las siguientes fórmulas

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &\approx f(x_0) + \frac{df}{dx}h \quad , \quad (h \approx 0) \\ f(x_0 + h, y_0 + k) &\approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k \quad , \quad (h \approx 0, k \approx 0) \\ f((x_0, y_0) + h\vec{v}) &\approx f(x_0, y_0) + D_v f(x_0, y_0)h \quad , \quad (h \approx 0) \end{aligned}$$

También en base a las mismas fórmulas es posible acotar ( indicar el mayor error posible ) el error que se puede cometer al calcular el valor de una variable dependiente en base a valores de las variables independientes, valores sujetos a error ( cotas para estos errores se conocen; y que pueden resultar por ejemplo del nivel de precisión de los instrumentos de medida ). Se utilizan las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} |f(x_0 + h) - f(x_0)| &\approx \frac{df}{dx}h \quad , \quad (h \approx 0) \\ |f(x_0 + h) - f(x_0)| &\leq \left| \frac{df}{dx} \right| h \quad , \quad (h \approx 0) \\ |f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)| &\leq \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| |h| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| |k| \quad , \quad (h \approx 0, k \approx 0) \end{aligned}$$

Aproximadamente , empleando derivadas ,

55. Calcular  $\sqrt{(1, 1)^3 + (1.98)^3}$
56. Calcular  $2.98e^{0.01}$ .
57. Calcular  $\sqrt{(2.01)^2 + (5.98)^2} + \sqrt{2.99^2}$ .
58. Calcular  $\frac{1}{2.01} + \frac{1}{2.98} + \frac{1}{6.03}$ .
59. La altura de un cilindro es  $h = 30$  cm y el radio de su base es 5 cm; calcular la variación de volumen del cilindro si  $h$  se aumenta en 0.2 cm y  $r$  se disminuye en 0.1 cm.
60. Las dimensiones interiores de una caja metálica rectangular cerrada son  $30 \times 20 \times 15$  cm; si el espesor del metal es 3 mm, calcular aproximadamente la cantidad de material empleada en su construcción.
61. Una caja cerrada, cuyas dimensiones exteriores son de 10 cm, 8 cm, 6 cm; está hecha de madera de 2 mm de espesor. Determinar el volumen aproximado del material que se gastó en hacer la caja.

62. Cuál es el error posible de la medida de la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo si los catetos miden 11.5 m y 7.8 m con un error posible de 0.1 m.
63. Una pila de ladrillos mide  $6 \times 50 \times 4$  pies, pero la cinta métrica comete un error por alargamiento del uno por ciento de la longitud medida; si se calculan 12 ladrillos por pie cúbico y el millar de ladrillos cuesta 200 mil pesos, calcular el error aproximado en el costo.

## PRACTICA # 6

### INTEGRALES MULTIPLES

*Dos conceptos que aparecen en la naturaleza son el de " variación " y el de " multiplicidad ". El primer concepto está enfocado en el análisis matemático a través del concepto de derivada; mientras que el segundo concepto está desarrollado a través del concepto de integral.*

*En la naturaleza se observan repetición de objetos semejantes, los que tienen asociado un valor para una misma magnitud geométrica y/o física; a partir de esa situación es razonable asignar al objeto más complejo ( resultante de la unión de los objetos semejantes simples ) un valor correspondiente a la magnitud en cuestión que no es más que la suma de los valores correspondientes a cada elemento.*

*Por ejemplo, si un rectángulo está conformado por numerosos cuadrados, el área a asignarse al rectángulo ( que resulta ser la unión de los cuadrados ) corresponderá a la suma de las áreas de los cuadrados. No siempre se da esta situación, cuando una característica tiene la mencionada propiedad se dice que es una característica medible. Características como la longitud, área , volumen, masa, son medibles.*

*Una técnica de determinar características medibles de objetos complejos a partir de componentes simples fue inventado por Arquímedes: se trata de descomponer ( en realidad desintegrar ) un objeto en partes simples; luego calcular la característica para cada parte simple y finalmente efectuar la suma respectiva ( denominado integración ) . Un caso importante se da cuando los elementos resultados de la división del objeto complejo pueden ser aproximados por elementos básicos tales que la medición de su característica es fácil o conocida; aunque el proceso computacional de la suma se compone de muchísimos términos. Es que es necesario realizar más sumas, ya que es la manera de ir reduciendo el error en el cálculo de la propiedad correspondiente al objeto complejo.*

*Muchos siglos posterior a Arquímedes, luego de la invención de la derivada; se puede mostrar que el último cálculo de suma con términos cada vez más numerosos se puede lograr en una mayoría de casos sencillamente determinando una función cuya derivada es conocida ( antiderivación ); este resultado se conoce como Teorema Fundamental del Cálculo.*

#### CALCULO DE INTEGRALES

*Si bien el cálculo de integrales se puede realizar ( al menos intentar ) calculando sumas con una gran cantidad de términos, este proceso es lento manualmente. Sin embargo, a pesar de ello, generalmente una suma relativamente de pocos términos conduce a buenas aproximaciones del valor exacto. Es recomendable dividir la región de integración en pedazos homogéneos y tomar los puntos donde se evalúa la función integrando que se hallan ubicados en la zona central de cada pedazo o elemento de la partición.*

1. Sea  $A$  el rectángulo con vértices  $(-1,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,2)$ ,  $(-1,2)$ , calcular aproximadamente el valor de la integral

$$\iint_A (1 + x^2 y) dA$$

- a) Dividiendo  $A$  en dos partes iguales , b) dividiendo  $A$  en cuatro partes iguales.
2. Sea  $A$  el triángulo limitado por  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z + y = 1$ ; calcular aproximadamente el valor de la integral

$$\iint_A e^{(x^2+y^2)} dA$$

## INTEGRALES ITERADAS

*El teorema fundamental del cálculo permite calcular una integral doble mediante el cálculo de funciones antiderivada del integrando, desplazando el cómputo de sumas con gran cantidad de sumandos a la determinación de antiderivadas; este problema se va haciendo más complicado a medida que aumenta la complejidad algebraica de la función integrando. Es verdad que el procedimiento mediante sumas es más general. Hay integrales que solamente se pueden calcular mediante ese mecanismo y no ser posible mediante antiderivadas ( simplemente porque el integrando no tiene función antiderivada entérminos de las funciones básicas conocidas ).*

Calcular.

3.  $\int_0^1 \int_1^2 dx dy.$
4.  $\int_0^1 \int_0^{x^2} x e^y dy dx.$
5.  $\int_0^1 \int_{x^2}^x x y^2 dy dx.$
6.  $\int_0^{\pi/2} \int_0^2 r^2 \cos \theta dr d\theta.$

Los resultados anteriores compare con los obtenidos mediante sumas de 4 términos. Es evidente que la aproximación es pobre pero ayuda a comprender las dificultades inherentes a cada procedimiento.

## TEOREMA FUNDAMENTAL . CALCULO DE INTEGRALES DOBLES

*Como se ha señalado el Teorema Fundamental es apropiado para calcular integrales cuando el integrando tiene funciones antiderivada; si embargo, actualmente con la disponibilidad de un equipo computacional, el método de calcular sumas es más adecuado.*

Calcular:

7.  $\int \int_A x^2 dx dy$ , siendo  $A$  el rectángulo limitado por  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$ ,  $y = 4$ .

8.  $\iint_A y dx dy$ , si  $A$  es el triángulo limitado por  $y = x$ ,  $x + y = 2$ ,  $x = 0$ .
9.  $\iint_A y^2 dx dy$ , donde  $A$  es la región del primer cuadrante limitada por  $xy = 4$ ,  $x = y$ ,  $y = x - 1$ .

### CAMBIO DEL ORDEN DE INTEGRACION

*Para calcular integrales dobles mediante el Teorema Fundamental es posible realizarlo de dos maneras: primero realizando la integración con respecto a la variable  $x$  y luego con respecto a la variable  $y$ ; y la otra manera es integrando primero con respecto a  $y$ , luego con respecto a  $x$ .*

*El resultado obtenido por cualquiera de los procesos, que solo difieren en el orden, es el mismo; aunque las operaciones algebraicas que se realizan son diferentes en general y en algún caso solo es posible realizar uno de ellos.*

Graficar la región de integración e invertir el orden de integración.

10.  $\int_0^1 \int_0^x f(x, y) dx dy.$
11.  $\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x, y) dx dy.$
12.  $\int_0^2 \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx dy.$
13.  $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} dy dx.$
14.  $\int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy dx.$
15.  $\int_{-6}^2 \int_{(x^2-4)/4}^{2-x} f(x, y) dy dx$

### CAMBIO DE VARIABLE

*El calculo de una integral doble con el Teorema Fundamental puede simplificarse algunas veces mediante un cambio de coordenadas más conocido como cambio de variables. Por una transformación de coordenadas sucede que el dominio cambia de forma como tambien la forma algebraica del integrando; ese hecho puede hacer más simple los cálculos o permitir un análisis más amplio y profundo de los sigificados relacionados con el valor a obtenerse.*



Emplear la fórmula

$$\int \int_R f(x, y) dy dx = \int \int_{G^{-1}(R)} f(x(u, v), y(u, v)) \left| J \frac{x, y}{u, v} \right| du dv$$

donde  $G^{-1}(R)$  , es la preimagen ( unívoca) de  $R$  por las ecuaciones de transformación

16. Hallar el área de la región limitada por  $xy = 4$  ,  $xy = 8$  ,  $xy^3 = 5$  ,  $xy^3 = 15$ . Sug: hacer  $xy = u$  ,  $xy^3 = v$
17. Mostrar que el volumen generado por la revolución de la región del primer cuadrante limitada por las parábolas  $y^2 = x$  ,  $y^2 = 8x$  ,  $x^2 = y$  ,  $x^2 = 8y$  en torno al eje  $X$  es  $279\pi/2$ . Sug: hacer  $y^2 = ux$  ,  $x^2 = vy$
18. Hallar el área de la región limitada por  $y = x^3$  ,  $y = 4x^3$  ,  $x = y^3$  ,  $x = 4y^3$
19. Sea  $R$  la región limitada por  $x + y = 1$  ,  $x = 0$  ,  $y = 0$  . Mostrar que

$$\int \int_R \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx dy = \sin 1$$

Sug: hacer  $x - y = u$  ,  $x + y = v$

20. Aplicando la transformación  $x + y = u$  ,  $y = uv$  , mostrar que

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-u} e^{y/(x+y)} dy dx = \frac{e-1}{2}$$

21. Calcular  $\int \int_R (x^2 + y^2) dx dy$  , donde  $R$  es la región del plano limitada por  $x^2 - y^2 = 1$  ,  $x^2 - y^2 = 9$  ,  $xy = 2$  ,  $xy = 4$ . Hacer el cambio  $u = x^2 - y^2$  ,  $v = 2xy$
22. Empleando coordenadas polares calcular  $\int \int_R \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$  , siendo  $R$  la región del plano limitada por  $x^2 + y^2 = 4$  y  $x^2 + y^2 = 9$
23. Empleando coordenadas polares , hallar el volumen de la región encima del plano  $xy$  limitada por el paraboloide  $z = x^2 + y^2$  y el cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$
24. Empleando coordenadas esféricas hallar el volumen encerrado por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  y el cono  $z^2 \sin^2 \alpha = (x^2 + y^2) \cos^2 \alpha$  , siendo  $\alpha$  una constante tal que  $0 \leq \alpha \leq \pi$ . A partir del resultado hallar el volumen de una esfera de radio  $a$ .
25. Empleando coordenadas cilíndricas, calcular el volumen de la región limitada por  $z = 4 - x^2 - y^2$  y el plano  $xy$ .

26. Para la región del ejercicio anterior determinar el centro de masa: Suponga densidad constante  $\sigma$

### AREAS DE REGIONES PLANAS

*Si bien el cálculo de áreas de figuras planas limitadas por curvas puede obtenerse mediante integrales a una variable, una aplicación sencilla a partir de la definición permite obtener un significado geométrico o interpretación del símbolo  $\iint_R f(x, y) dA$ .*

En los ejercicios siguientes hallar el área de la región limitada por las curvas dadas.

27.  $x + y = 2$ ,  $2y = x + 4$ ,  $y = 0$ .
28.  $y = x^2 + 2$ ,  $y = x + 4$ .
29.  $y^2 = 5 - x$ ,  $y = x + 1$ .
30.  $y^2 = 4ax$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 3a$ .
31.  $y = x^2$ ,  $x^2 + y^2 = 2$ .
32.  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ ,  $y = a - x$ .
33.  $y = x^3 - x$ ,  $y = x - x^3$ .
34.  $y = x^2$ ,  $y = x$ ,  $y = 3x$ .
35.  $x + 3y = 3$ ,  $x + 3y = 6$ ,  $y = 2x$ ,  $y = 2x + 1$  (Sugerencia: Efectuar un cambio de variable).
36.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  (Sugerencia: Efectuar un cambio de variable).
37.  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $x^2 + y^2 = b^2$ ,  $0 < a < b$  (Sugerencia: Pasar a coordenadas polares).

### MASA, DENSIDAD MEDIA, CENTRO DE GRAVEDAD, CENTROIDE.

*El cálculo de magnitudes geométricas y/o físicas se realizan a partir de otras magnitudes básicas : por ejemplo, el cálculo de área de un rectángulo se hace a partir de otras dos magnitudes ( longitudes ) que son la base y la altura. Cuando dichas variables ( en este caso base y altura ) sufren variaciones la figura se deforma; sin embargo, lo importante es que la nueva figura se puede descomponer en elementos o partes que aproximadamente son rectángulos. Los métodos del cálculo integral permiten sumar las áreas de los elementos que son aproximadamente rectangulares y pueden disminuir el error simplemente disminuyendo el tamaño de los pedazos.*

*En resumen, el cálculo integral permite hallar el valor de magnitudes con " componentes " variables como resultado de una suma de magnitudes para el caso de " componentes " constantes. Para hacer efectivos estos cálculos es importantes hacer una adecuada división ( desintegración ) de la región de integración.*

*Por ejemplo, el cálculo de masa de una substancia homogénea puede hacerse si se conoce su volumen y su densidad. En el caso de una substancia no homogénea ( es decir en la fórmula  $m = \delta v$  no es aplicable porque  $\delta$  no es constante) se puede dividir la substancia en pequeños elementos ( pequeños paralelepípedos ) y considerar que cada uno de ellos tiene densidad constante. Se calcula las masas parciales mediante la fórmula para densidad constante, se suman las masas parciales obteniéndose la masa total aproximadamente ( el error se debe, en este caso como en la mayoría de los casos ) a que el supuesto de que la densidad es constante en cada pedazo no es verdadero.*

38. Si  $A$  es la región de espesor constante  $e$  limitada por  $y = x^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$  y la densidad es  $\delta(x, y) = x$ , hallar: a) La masa, b) la densidad media.
39. Si  $A$  es la lámina circular de centro el origen de coordenadas y radio  $R$ , con espesor constante  $e$  y la densidad es  $\delta(x, y) = x^2 + y^2$ , hallar: a) La masa, b) la densidad media.

*Los cálculos de ciertas magnitudes físicas y/o geométricas al ser planteadas algebraicamente sugieren - por su forma - que dichos cálculos corresponden al cálculo de una integral.*

En los siguientes cuatro ejercicios hallar el centroide de cada una de las regiones limitadas por las curvas dadas

40.  $y = x^2$ ,  $x + y = 2$ .
41.  $y^2 = x + 3$ ,  $y^2 = 5 - x$ .
42. Una lámina delgada está limitada por el arco de parábola  $y = 2x - x^2$  y el intervalo  $0 \leq x \leq 2$ . Determinar su masa si la densidad en cada punto  $(x, y)$  es  $\delta(x, y) = x$ .
43. Lo mismo que el ejercicio anterior para :  $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ ,  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ ,  $y = 0$ ,  $\delta(x, y) = y$ .
44. Calcular el volumen del tetraedro limitado por  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  y los planos coordenados.
45. Hallar el volumen del sólido limitado por  $x + y = 1$ ,  $x = 2y$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $z = 4$ .
46. Calcular el volumen encerrado por  $z = x^2 + y^2$ ,  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $z = 0$ .

47. Calcular el volumen encerrado por los cilindros  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $y^2 + z^2 = a^2$ .
48. Hallar el volumen limitado por el paraboloide  $z = x^2 + y^2$  y el cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .
49. Hallar el volumen limitado superiormente por  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , e inferiormente por  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .
50. Hallar el volumen que se extrae de una esfera de radio  $R$  si se la perfora con un taladro cilíndrico de radio  $b$  y cuyo eje coincide con un diámetro de la esfera. Emplee coordenadas cilíndricas.
51. Hallar la ecuación del plano paralelo al plano  $xy$  que divide en dos partes de volúmenes iguales a la semiesfera  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ,  $z \geq 0$ .
52. Calcular  $\iint_A (x^2 + y^2) dx dy$ , donde  $A$  es el paralelogramo de vértices  $(1, 1)$ ,  $(5, 2)$ ,  $(6, 5)$ ,  $(2, -1)$  (Sugerencia: Hacer  $x = 1 + 4u + v$ ,  $y = 1 + u + 3v$ ).
53. Calcular  $\iint_A \frac{y}{x^2 + y^2} dA$ ,  $A$  es la porción del anillo  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$  en el segundo cuadrante.
54. Calcular  $\iint_A \frac{1}{(1 + y^2 + y^2)^{3/2}} dA$ , donde  $A$  es todo el plano  $R^2$  (Sugerencia: Usar la idea del ejercicio resuelto 45).

### CALCULO DE INTEGRALES TRIPLES

55. Si  $V$  es el conjunto  $0 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq y \leq 3$ ,  $1 \leq z \leq 2$ , calcular aproximadamente la integral triple.

$$\iiint_V xyz dV$$

56.  $\int_0^2 \int_0^1 \int_1^2 dz dy dx$ .
57.  $\int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^2 zr^2 \sin \theta dz dr d\theta$ .
58.  $\int_0^4 \int_0^{2\sqrt{z}} \int_0^{\sqrt{4z-x^2}} dy dx dz$ .
59.  $\int_0^2 \int_{2-y}^{6-2y} \int_0^{\sqrt{4-y^2}} z dz dx dy$ .
60. Calcular el volumen del tetraedro limitado por  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  y los planos coordenados.

61. Hallar el volumen del sólido limitado por  $x + y = 1$ ,  $x = 2y$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $z = 4$ .
62. Hallar el volumen encerrado por  $x - y + 2z = 0$ ,  $y = 2$ ,  $x = 0$ ,  $z = 0$ .
63. Calcular el volumen encerrado por  $z = x^2 + y^2$ ,  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $z = 0$ .
64. Hallar el volumen del sólido limitado  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $x^2 + y^2 = az^2$ ,  $z = 0$ .
65. Calcular el volumen encerrado por los cilindros  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $y^2 + z^2 = a^2$ .
66. Calcular el volumen limitado por  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $z = 0$ ,  $z = 2y$ .
67. Hallar el volumen limitado por el paraboloide  $z = x^2 + y^2$ , el cilindro  $x^2 - x + y = 0$ , el plano  $z = 0$ ,  $y = 0$ .
68. Hallar el volumen limitado por el paraboloide  $z = x^2 + y^2$  y el cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .
69. Hallar el volumen limitado por  $x^2 + az = a^2$ ,  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $z = 0$ .
70. Hallar el volumen limitado superiormente por  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , e inferiormente por  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .
71. Calcular el volumen de la región limitada superiormente por  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  e inferiormente por  $z = x^2 + y^2$ .
72. Calcular el volumen encerrado por  $z^2 + 4y - 4 = 0$ ,  $x^2 = y$ .
73. Hallar el volumen de la región limitada por  $x^2 + y = 9$ ,  $x + z = 4$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .
74. Hallar el volumen limitado por  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = y$ ,  $z = y^2$ .
75. Calcular el volumen encerrado entre los paraboloides  $x^2 + a^2y^2 + z = 1$ ,  $x^2 + a^2y^2 - 2z = 1$ .

**MASA. MOMENTO. CENTRO DE GRAVEDAD. CENTROIDE DE REGIONES SOLIDAS**

76. Hallar el centroide de la región del primer octante limitada por  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ , donde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  son positivos.
77. Hallar el momento de inercia de un cilindro circular recto de radio  $a$  y altura  $h$  con respecto a su eje si la densidad es proporcional a su distancia a la base.
78. Hallar la masa de una esfera de radio  $R$ , siendo la densidad en cada punto proporcional a su distancia a un plano diametral fijo.
79. Hallar la masa de un cono circular de altura  $h$  y radio de la base  $R$ , siendo la densidad en cada punto proporcional a su distancia al eje.

80. Hallar el centro de gravedad de un cubo de arista  $a$ , siendo la densidad en cada punto igual a la suma de sus distancias a tres aristas adyacentes (ejes coordenados).

### PROBLEMAS VARIOS DE INTEGRALES TRIPLES

81. Hallar el volumen encerrado por  $y^2 + x^2 = 4x = 8$ ,  $y^2 + z^2 = 4$ ,  $x = 0$ .
82. Hallar el volumen de la región limitada por la esfera  $r = 2a \cos \phi$  y el cono  $\phi = b$ , donde  $0 < b < \pi/2$ . Discutir el caso  $b = \pi/2$ .
83. Hallar a) el volumen y b) el centroide de la región limitada superiormente por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  e inferiormente por el plano  $z = c$ , con  $R > c > 0$ .
84. Calcular el momento de inercia del elipsoide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  con respecto a sus ejes.
85. Hallar el volumen limitado por los cilindros hiperbólicos  $xy = 1$ ,  $xy = 9$ ,  $xz = 4$ ,  $xz = 36$  (Sugerencias: efectuar un cambio de variable).
86. Hallar la masa de una superficie esférica siendo la densidad en cada punto proporcional a su distancia al origen de coordenadas.
87. Hallar la ecuación del plano paralelo al plano  $xy$  que divide en dos partes de volúmenes iguales a la semiesfera  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ,  $z \geq 0$ .

## PRACTICA #7 TEOREMAS INTEGRALES

*El cálculo de diferentes magnitudes geométricas y sobre todo físicas, esencialmente cuando las magnitudes a partir de las cuales se realiza el cálculo varían de punto a punto. Por ejemplo, el cálculo de trabajo es simple cuando el desplazamiento que realiza la partícula se hace a lo largo de una recta y el campo de fuerzas actuando sobre la partícula es constante. Pero si la partícula se mueve a lo largo de una curva y el campo de fuerzas actuando sobre la partícula es variable no es aplicable la fórmula para el caso dirección de movimiento y fuerza constante. En estos casos se divide ( desintegra ) la curva en pedazos de manera que en cada uno de esos elementos la trayectoria se puede considerar recta y la fuerza constante; esa suposición permite aplicar a cada pedazo la fórmula básica y ( por las características de la magnitud trabajo ) el trabajo total se halla sumando los trabajos parciales. La eliminación del error introducido por los supuestos se puede eliminar realizando la división de la curva en segmentos cada vez más pequeños y ; naturalmente el cálculo se traduce en el cálculo de una integral.*

*Los TEOREMAS INTEGRALES son generalización a dimensión mayor del Teorema Fundamental del Cálculo. La idea que descansa en el Teorema Fundamental*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) ; \text{ siendo } f(x) \text{ la derivada de } F(x)$$

*es que la integral de una función  $f(x)$  en un intervalo  $[a, b]$  es igual a la valoración ( que luego se traducirá igual a la integral ) de una otra función pero ya no en el intervalo sino solamente en sus puntos extremos ( que luego se traducirá en la frontera del intervalo ).*

*El TEOREMA DE GREEN EN EL PLANO da la integral ( doble ) de una función en una región del plano en términos de una integral ( curvilínea ) realizada sobre la curva que limita la región y el integrando es una función " antiderivada ".*

*El TEOREMA DE GAUSS O DE LA DIVERGENCIA da la integral ( triple ) de una función en un recinto o volumen en términos de una integral ( doble o de superficie ) sobre la superficie que cubre al sólido.*

*El TEOREMA DE STOKES da la integral ( doble o de superficie ) de una función sobre una porción de superficie en el espacio en términos de una integral ( curvilínea ) sobre la curva que limita a la superficie.*

*La importancia de estos teoremas radica en su significado o interpretación física, significado que permite resolver un problema a partir de dos enfoques: uno enfocado en lo que ocurre en el interior del conjunto de integración y otro enfocado en lo que ocurre la frontera o borde de dicho conjunto.*

*Conceptualmente los tres teoremas son equivalentes al Teorema Fundamental del Cálculo.*

### 1. CALCULO DIRECTO DE INTEGRALES CURVILINEAS

Las denominadas integrales curvilíneas tienen su origen en el cálculo del trabajo realizado por un campo de fuerzas para desplazar una partícula de un punto a otro a lo largo de una trayectoria dada.

Conceptualmente una integral curvilínea es una generalización de la integral del cálculo I; el intervalo de integración es una parte de una curva ubicado en el plano o en el espacio y el integrando es una función definida sobre el segmento de curva donde se realiza la integración. La definición de una integral curvilínea ( sugerida por la manera de cómo se calcula el trabajo ) contiene la idea básica de la integral del cálculo I. Por eso mismo, si la curva se reduce a un segmento de la recta real la integral curvilínea se reduce a la integral del cálculo I

2. Calcular  $\int_{(0,0)}^{(1,1)} \sqrt{y} dx + (x - y) dy$  a lo largo de la recta  $x = y$ .
3. Calcular  $\int_{(0,0)}^{(1,3)} x^2 y dx + (x^2 - y^2) dy$  a lo largo de a)  $y = 3x^2$ , b)  $y = 3x$ .
4. Calcular  $\int_{(1,1)}^{(2,8)} (5xy - 6x^2) dx + (2y - 4x) dy$  a lo largo de  $y = x^3$ .
5. Calcular  $\int_{(1,1)}^{(4,3)} (2x - y^2) dx + (y - x^2) dy$  a lo largo de los segmentos a) de  $(1, 1)$  a  $(3, 1)$  y de  $(3, 1)$  a  $(3, 4)$ ; b) de  $(1, 1)$  a  $(1, 4)$  y de  $(1, 4)$  a  $(3, 4)$ .
6. Calcular  $\int_C (x^2 + y^2) dx - 2xy dy$ , donde  $C$  está dada paramétricamente por  $x = t$ ,  $y = t^2 - t$ , y  $t$  varía de  $t = 1$  a  $t = 2$ .
7. Calcular  $\int_C x^2 dx + y^2 dy$ , donde  $C$  está dada por  $x = \sin t$ ,  $y = \cos t$ , desde  $(1, 0)$  a  $(0, 1)$ .
8. Calcular  $\oint_C (2x + y^2) dx + (3y - 14x) dy$ , donde  $C$  es el contorno de la región limitada por  $y = x^2$ ,  $x = y^2$ .
9. Calcular  $\oint_C (y - 2x) dx + (3x + 2y) dy$ , donde  $C$  es la circunferencia  $x^2 + y^2 = 4$ .
10. Calcular  $\int_C (2y + 3) dx + xz dy + (yz - x) dz$ , a lo largo de la curva  $C$  dada por  $x = 2t^2$ ,  $y = t$ ,  $z = t^3$  desde  $t = 0$  a  $t = 1$ .

### TEOREMA DE GREEN EN EL PLANO

El Teorema de Green en el plano expresa una integral doble en una región en términos de una integral curvilínea a lo largo de la curva que limita la



región. La importancia de este teorema radica en que permite observar un resultado ( valor de una magnitud física ) desde dos aspectos, hecho que permite una mejor comprensión del fenómeno en estudio

11. Verificar el teorema de Green en el plano para  $\int_C (3x^2 - 8y^2) dx + (4y - 6xy) dy$ , donde  $C$  es la región limitada por: a)  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = x^2$ , b)  $x = 0$ ,  $y = 0$  y  $x + y = 1$ .
12. Comprobar el teorema de Green en el plano para  $\int_C xy^2 dx + (x^3 - x^2y) dy$ , siendo  $C$  el triángulo de vértices  $(0,0)$ ,  $(-1,1)$ ,  $(1,1)$ .
13. Comprobar el teorema de Green en el plano para  $\int_C (3x + 4y) dx + (2x - 3y) dy$ , siendo  $C$  la circunferencia centrada en el origen de radio dos.
14. Calcular  $\int_C (x^2 - 2xy) dx + (x^2y + 3) dy$  alrededor del contorno  $C$  de la región limitada por  $y^2 = 8x$ ,  $x = 2$ , a) directamente, b) usando el teorema de Green.
15. Calcular  $\int_C (2x - y^3) dx - xy dy$ , donde  $C$  es el contorno de la región limitada por las circunferencias  $x^2 + y^2 = 1$  y  $x^2 + y^2 = 9$ .

### INDEPENDENCIA DEL CAMBIO DE INTEGRACION

Cuando se calcula el trabajo que realiza un campo de fuerzas para desplazar una partícula a lo largo de una determinada trayectoria, el resultado depende tanto del campo de fuerzas como también de la trayectoria recorrida. Sin embargo, para algunos tipos de campos de fuerzas ( denominados campos conservativos ), el trabajo es independiente de la trayectoria seguida; esto es, solo depende del punto inicial y punto final de la trayectoria. Este resultado permite la resolución de problemas de una manera mas sencilla: el trabajo realizado se reduce a calcular la diferencia de potencial que existe entre los puntos extremos de la curva. En los campos de fuerza donde se tiene independencia del valor del trabajo en relación a la curva de integración, un resultado fundamental es que suma de la energía cinética y energía potencial de la partícula permanece constante.

16. a) Mostrar que  $\int_{(0,1)}^{(2,3)} (x + y) dx + (x - y) dy$  es independiente del camino que une  $(0,1)$  con  $(2,3)$  b) calcular la integral.
17. Mostrar que  $\int_{(0,1)}^{(1,2)} (x^2 + y^2) dx + 2xy dy$  es independiente del camino, calcular su valor.

18. Calcular  $\int_C (2xy^3 - y^2 \cos x) dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2) dy$  a lo largo de la parábola  $2x = \pi y^2$  desde  $(0, 0)$  a  $(\pi/2, 1)$ .
19. Calcular la integral curvilínea del problema anterior en torno a un paralelogramo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(3, 0)$ ,  $(5, 2)$ ,  $(2, 2)$ .
20. Calcular  $\int_C 3x^2 y^2 dx + 2x^3 y dy$  a lo largo de la circunferencia de centro en el origen y de radio  $R$ .  
En los siguientes ejercicios para  $P(x, y)$  y  $Q(x, y)$  dados, a) mostrar que  $Pdx + Qdy$  es una diferencial exacta y determinar  $\phi(x, y)$  tal que  $d\phi = Pdx + Qdy$  b) Calcular  $\int_{(a,b)}^{(c,d)} Pdx + Qdy$ .
21.  $\int Pdx + Qdy = 2xydx + x^2 dy$ ,  $(a, b) = (0, 0)$  y  $(c, d) = (1, 4)$ .
22.  $\int Pdx + Qdy = (xdy - ydx) / x^2$ ,  $(a, b) = (1, 0)$  y  $(c, d) = (3, 2)$ .
23.  $\int (xdx - ydy) / (x^2 + y^2)$ ,  $(a, b) = (1, 0)$  y  $(c, d) = (3, 5)$ .
24.  $\int e^x dx + e^{-y} dy$ ,  $(a, b) = (0, 0)$  y  $(c, d) = (x, 3)$ .
25.  $\int Pdx + Qdy = (2xy - y^3) dx + (x^2 - 3xy^2) dy$ ,  $(a, b) = (0, 0)$  y  $(c, d) = (3, 1)$ .

## INTEGRALES DE SUPERFICIE

Las integrales de superficie aparecen por dos problemas básicos:

El problema geométrico de calcular el área de una superficie ubicada en el espacio. Para ello se divide la superficie en pequeños pedazos de manera que cada pedazo sea aproximadamente una región plana. Se calcula, bajo el supuesto anterior, el área de cada pedazo y mediante una suma se calcula aproximadamente el área total de la superficie. Si se desea reducir el error, se descompone la superficie en pedazos cada vez más pequeños y se observa que la suma se convierte exactamente en el cálculo de una integral doble.

El problema físico de calcular el caudal que atraviesa una superficie dado un campo de velocidades que define el movimiento de un líquido. Si la superficie es plana y el campo de velocidades es constante, el problema de calcular el caudal se reduce a un producto escalar multiplicado por un área; pero cuando la superficie no es plana y el campo de velocidad varía de punto a punto se descompone la superficie en pedazos muy pequeños donde se supone que la superficie es plana y el campo de velocidades constante. Se calcula, bajo ese supuesto, el caudal en cada uno de los pedazos y el

caudal total en la superficie se halla sumando todos los caudales parciales. Para disminuir el error los pedazos se hacen cada vez más pequeños y numerosos; y naturalmente aparece que el caudal total se reduce a una integral de superficie.

26. Calcular  $\iint_S z dS$ , donde  $S$  es la superficie del tetraedro limitado por  $x = 0, y = 0, z = 0, x + 2y + 3z = 6$ .
27. Calcular  $\iint_S (x^2 + y^2) dS$ , donde  $S$  es la superficie lateral del cono  $z^2 = 3(x^2 + y^2), 0 \leq z \leq 3$ .
28. Calcular  $\iint_S (x^2 + y^2) dS$ , donde  $S$  es la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .
29. Calcular  $\iint_S z dx dy$ , donde  $S$  es la cara exterior del elipsoide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

#### ÁREA DE UNA SUPERFICIE

30. Calcular el área de la región del plano  $x - 2 + 3z = 0$  limitado por el cilindro  $x^2 + y^2 = 4$ .
31. Calcular el área de la superficie lateral de un cilindro de radio y altura  $h$ .
32. Calcular el área del plano  $2x + y + 2z = 16$  limitada por a)  $x = 0, y = 0, x = 2, y = 3$ , b)  $x = 0, y = 0$  y  $x^2 + y^2 = 64$ .
33. Hallar el área de la superficie del paraboloide  $2z = x^2 + y^2$  que queda fuera del cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .
34. Hallar el área de la superficie del cono  $z^2 = 3(x^2 + y^2)$  limitado por el paraboloide  $z = x^2 + y^2$ .
35. Hallar el área de la superficie común a los cilindros  $x^2 + y^2 = a^2, x^2 + z^2 = a^2$ .
36. Hallar el área de la superficie  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  dentro del cono  $z \tan \alpha = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 < \alpha < \pi/2$ . Utilizar este resultado para averiguar el área de una superficie semiesférica.

#### GRADIENTE. DIVERGENCIA. ROTACIONAL

*Un campo escalar es aquél donde en cada punto del campo se tiene definida una magnitud física determinada por un solo número; y un campo vectorial es aquél donde en cada punto se tiene definido una magnitud física determinada por un vector o conjunto de números.*

*Mediante procesos de derivación, derivación parcial, un campo escalar se transforma en un campo vectorial llamado su campo GRADIENTE; y se*

dice que el campo vectorial proviene del escalar dado. Lo interesante es que este campo da información complementaria de gran valor acerca de la magnitud asociada al campo escalar.

Lo importante de obtener un campo a partir de otro es que un problema planteado en el campo original se lo puede resolver en el campo derivado y obtenido el resultado se puede lograr obtener el resultado pedido en el campo original .

De igual manera, dado un campo vectorial es posible derivar a partir de él otros campos : EL CAMPO DIVERGENCIA Y EL CAMPO ROTACIONAL. Como se indicó anteriormente, existe la posibilidad de resolver un problema en el campo derivado o en el campo original; aunque la resolución en cada caso exige diferentes procedimientos computacionales, lo que aumenta una mejor comprensión de las características del campo en estudio.

Demostrar:

$$37. \nabla (f + g) = \nabla f + \nabla g.$$

$$38. \nabla \circ (F + G) = \nabla \circ F + \nabla \circ G.$$

$$39. \nabla \times (F + G) = \nabla \times F + \nabla \times G$$

$$40. \nabla \times (\nabla f) = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

$$\text{Nota. } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ se llama operador Laplaciano.}$$

### TEOREMA DE LA DIVERGENCIA

El Teorema de la Divergencia básicamente indica que el caudal total de líquido que atraviesa la superficie que limita un recinto cerrado ( caudal que sale del recinto menos caudal que ingresa al recinto ) es exactamente igual a la cantidad de líquido que se genera o pierde dentro del recinto. Para el cálculo del caudal se requiere el campo de velocidades y para el cálculo de la cantidad generada o pérdida en el interior del recinto se requiere conocer el campo divergencia ( campo derivado ) del campo de velocidades.

$$41. \text{ Verificar el teorema de la Divergencia para } F = (2xy + z)\hat{i} + y^2\hat{j} - (x + 3y)\hat{k}, \text{ en la región limitada por } 2x + 2y + z = 6, x = 0, y = 0, z = 0.$$

$$42. \text{ Verificar el teorema de la Divergencia para } F = 2x^2y\hat{i} - y^2\hat{j} + 4xz^2\hat{k}, \text{ en la región } V \text{ del primer octante limitada por } y^2 + z^2 = 9, x = 2.$$

$$43. \text{ Calcular } \iint_S F \cdot \mathbf{n} dS, \text{ donde } F = (z^2 - x)\hat{i} - xy\hat{j} + 3z\hat{k} \text{ y } S \text{ es la superficie de la región limitada por } z = 4 - y^2, x = 0, x = 3, \text{ y el plano } xy.$$

44. Calcular  $\iint_S \vec{r} \circ ndS$ , donde a)  $S$  es la esfera de radio 2, centrada en el origen. b)  $S$  es la superficie del cubo  $x = -1, y = -1, z = -1, x = 1, y = 1, z = 1$ .

45. Demostrar que  $\iint_S ndS = 0$ , siendo  $n$  la normal exterior a una superficie cerrada cualquiera  $\bar{S}$ .

### TEOREMA DE STOKES

*El Teorema de Stokes básicamente indica que el trabajo realizado por un campo de fuerzas para desplazar un partícula a lo largo de una trayectoria cerrada ( que limita a una superficie en el espacio ) es igual a la suma ( integral ) de las " circulaciones " alrededor de cada punto de la superficie limitada por la curva. Para calcular las circulaciones en los diferentes puntos se requiere del campo rotacional ( campo derivado ) obtenido a partir del campo de fuerzas original.*

46. Verificar el teorema de Stokes para  $F = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$  y  $S$  es la semiesfera superior  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, z \geq 0$ .

47. Verificar el teorema de Stokes para  $F = (y - z + 2)\hat{i} + (yz + 4)\hat{j} - xz\hat{k}$ , si  $S$  es la superficie del cubo  $x = 0, y = 0, z = 0, x = 2, y = 2, z = 2$  sobre el plano  $xy$ .

48. Calcular  $\iint_S (\nabla \times F) \circ ndS$ , siendo  $F = (x - z)\hat{i} + (x^3 + yz)\hat{j} - 3xy^2\hat{k}$ , y  $S$  es la superficie del cono  $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$  encima del plano  $xy$ .

49. Calcular  $\iint_S (\nabla \times F) \circ ndS$ , donde  $F = (x^2 + y - 4)\hat{i} + 3xy\hat{j} + (2xz + z^2)\hat{k}$ , y  $S$  es la superficie de a) el hemisferio  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$  sobre el plano  $xy$ , b) el paraboloide  $z = 4 - (x^2 + y^2)$  sobre el plano  $xy$ .

50. Calcular  $\iint_S (\nabla \times F) \circ ndS$ , sobre la superficie de intersección de los cilindros  $x^2 + y^2 = a^2, x^2 + z^2 = a^2$  que está incluida en el primer octante.

## PRACTICA # 8 SUCESIONES Y SERIES

### 1. SUCESIONES

*Las sucesiones de números ( conjuntos de números donde está definido el primero, segundo ,etc. términos de la secuencia ) tienen diferentes interpretaciones; por ejemplo, pueden representar la ubicación, observada a intervalos de tiempo iguales, de una partícula que se mueve en la recta real. Resulta que  $n$  es el tiempo de observación y  $a_n$  da la posición de la partícula en ese instante.*

*En el estudio de las sucesiones es de gran importancia el comportamiento de su ubicación a medida que transcurre el tiempo; interesa qué tipo de movimiento realiza la partícula para valores cada vez más grandes del tiempo. En general se dan cuatro tipos de comportamiento:*

*Convergencia, la partícula va aproximándose cada vez más ( o incluso puede alcanzarlo ) a un punto denominado su ( ubicación ) límite.*

*Divergencia, la partícula no se aproxima a ninguna posición límite sino se va alejando más y más de su posición inicial.*

*Periodicidad, la partícula a intervalos de tiempo regulares va ocupando la misma posición.*

*Caótico : la partícula observada parece mover erráticamente a lo largo de la recta real, sin embargo; es posible determinar regularidades " más complejas " que la periodicidad ( ciclos de diferente periodicidad ).*

Escribir los primeros cuatro términos de la sucesión  $\{a_n\}$  cuyo término  $n$ -ésimo está dado por

1.  $a_n = \frac{3n - 2}{n^2 + 1}.$
2.  $a_n = \frac{(-1)^{n-1} n}{2^n}.$
3.  $a_n = \frac{2 + (-1)^n}{n^2}.$
4.  $a_n = \frac{(2 + \sin(n\pi/2)) \cos n\pi}{n!}.$
5.  $a_n = \frac{(2x)^{n-1}}{(2n-1)^5}.$
6.  $a_n = \frac{(-1)^n \times x^{2n-1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}$

7. Mostrar que el  $n$ -ésimo término de la sucesión de Fibonacci está dado por

$$a_n = \frac{(a^n - b^n)}{\sqrt{5}}$$

con

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}) \\ b &= \frac{1}{2} (1 - \sqrt{5}) \end{aligned}$$

Determinar, en cada caso, si la sucesión  $\{a_n\}$  dada es convergente o divergente, en caso de que sea convergente hallar su límite:

8.  $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$

9.  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

10.  $\left\{ \sin \frac{n\pi}{4} \right\}.$

11.  $\left\{ \frac{\ln n}{n} \right\}.$

Según la definición, mostrar que

12. La sucesión  $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$  converge a 1.

13. La sucesión  $\left\{ \frac{n-1}{3n+1} \right\}$  convergente a  $\frac{1}{3}$ .

14. Demostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = 1, p > 0$ . (Sugerencia:  $n^{p/n} = e^{(p \ln n)/n}$ ).

### SERIES DE TERMINOS POSITIVOS

*Las series de números se originan a partir de las sumas parciales de los términos de una sucesión*

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \end{aligned}$$

*y si interpretamos que cada valor  $a_i$  de la sucesión representa el monto de dinero depositado en un banco en el mes  $i$ , (  $a_i$  positivo indica depósito mientras que  $a_i$  significa retiro de fondos; que en este caso no se da ) entonces los diferentes términos de la serie ( que en realidad es otra sucesión*

que proviene de la inicial ) representan el depósito con que se cuenta en el banco en el mes  $i$ .

Los cuatro tipos de comportamientos de la serie ( como sucesión ) dan las maneras en que puede comportarse el monto disponible como depósito a media que los meses van transcurriendo.

Determinar la convergencia o divergencia de las siguientes series

$$15. \sum \frac{2}{n(n+1)}.$$

$$16. \sum \frac{n+1}{n^2(n+2)}.$$

$$17. \sum \frac{n^{2n}}{e^n}.$$

$$18. \sum \frac{2n}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

$$19. \sum \frac{1}{n^3-1}.$$

$$20. \sum \frac{1}{\sqrt[4]{n}}.$$

$$21. \sum \frac{1}{n^{n+1}}.$$

$$22. \sum \frac{5^n}{n!}.$$

$$23. \sum \frac{10^n}{3^n+1}.$$

$$24. \sum \frac{n}{2^{2n}}.$$

$$25. \sum n \left( \frac{2}{3} \right)^n.$$

$$26. \sum \frac{n+1}{n^2\sqrt{1-n}}.$$

$$27. \sum 2^n n^3.$$

$$28. \sum \frac{n!}{n^n}.$$

$$29. \sum \frac{n^2}{2^n}.$$

$$30. \sum \left( \frac{n}{n^2+2} \right)^n.$$



$$31. \sum \frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n+3}}.$$

$$32. \sum \frac{2^n}{n \cdot 5^n}.$$

$$33. \sum \frac{2n-10n^2}{(3n+2)n^{4/3}}.$$

$$34. \sum \frac{4n^2+5n-2}{n(n^2+1)^{3/2}}.$$

$$35. \sum \frac{1}{n(\ln n)^3}.$$

$$36. \sum \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}.$$

$$37. \sum \left( \frac{n}{n+1} \right) n^2.$$

$$38. \sum \frac{n!}{10^n}.$$

$$39. \sum \frac{1}{n\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}}.$$

$$40. \sum \frac{2^n n!}{n^n}.$$

$$41. \sum \frac{e^n n!}{n^n}.$$

$$42. \sum \frac{\ln n}{n}.$$

$$43. \sum \frac{\ln n}{\sqrt{n}}.$$

$$44. \sum \frac{\ln n}{n^p}.$$

$$45. \sum \frac{(\ln n)^2}{n^2}.$$

$$46. \sum \frac{3+\sin(n)}{n(1+e^{-n})}$$

$$47. \sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}.$$

48. Hallar la suma de las series a)  $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}$ , b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  (Sugerencia: Verificar que  $S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$  y tomar el límite).

### SERIES ALTERNAS

*Dentro de la misma interpretación dada los términos de la sucesión que origina la serie ( como depósitos mensuales de dinero en un banco), las series alternas presentan la situación de que un mes se deposita y al otro se retira fondos; y así sucesivamente. Se desea conocer el comportamiento del valor de depósito a medida que el tiempo va transcurriendo.*

Determinar si las siguientes series son condicional o absolutamente convergente.

49.  $\sum (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n}$ .
50.  $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$ .
51.  $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln n}$
52.  $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt[n]{3}}$ .
53.  $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$ .
54.  $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2+2}$ .
55.  $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^3}$ .
56.  $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ .
57.  $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2+2}$ .
58.  $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{(n!)^3}$ .

### PROBLEMAS VARIOS SOBRE SERIES

59. Explicar: Si  $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  Entonces  $S = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) \dots = 1$ . Y también  $S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$ . Luego  $1 = 0$ .

60. Si  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  converge a  $S$ , demostrar que la serie reagrupada  $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots = \frac{3}{2}S$ . Explicar. (Sugerencia: Tomar  $\frac{1}{2}$  en la primera serie y escribirla en la forma  $0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + \dots$  y sumarla luego término a término con la primera serie. En realidad se tiene que  $S = \ln 2$  - Ejercicio resuelto 52 -).

## SERIE DE POTENCIAS

Las funciones más sencillas del análisis matemático resultan ser los polinomios; se caracterizan que para evaluarlos ( a diferencia de otras funciones ) solo se emplean las dos operaciones algebraicas básicas: suma y multiplicación.

Un problema interesante e importante es la posibilidad de representar funciones , que no son polinomios, mediante polinomios con la aproximación que se desee.

Un teorema matemático muestra que, en determinados intervalos ( intervalos de convergencia ) , la mayoría de las funciones ( se exigen ciertas condiciones ) se pueden aproximar por polinomios. Más aún, se pueden definir nuevas funciones mediante serie de funciones polinomiales.

En la práctica, es posible sustituir una función por su representación polinomial; lo que permite solucionar problemas que de otra manera no son resolubles. Aunque es evidente que los resultados hallados son aproximados; ( mejor algo que nada )

Determinar el intervalo de convergencia de las siguientes series, estudiar los extremos.

61.  $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots$
62.  $\frac{x}{5} - \frac{x^2}{2 \cdot 5^2} + \frac{x^3}{3 \cdot 5^3} - \frac{x^4}{4 \cdot 5^4} + \dots$
63.  $\sum \frac{x^n}{n(n+1)}$ .
64.  $\sum (-1)^n \frac{x^n}{n^n}$ .
65.  $\sum_{n=2} \frac{x^{2n}}{(n-1)n(n+1)}$ .
66.  $\sum_{n=2} \frac{x^n}{(\ln n)^n}$ .
67.  $\sum \frac{(x-2)^n}{n^2}$ .

68.  $\sum \frac{(x-3)^n}{n \cdot 3^n}$ .  
Desarrollar la función dada en serie de potencias y determinar el intervalo de convergencia.
69.  $\tan x$  en potencias de  $x$ .
70.  $e^{x/2}$  en potencias de  $x-2$ .
71.  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  en potencias de  $x$ .
72.  $\sin^2 x$  en potencias de  $x$ .
73.  $\arctan x$  en potencias de  $x$  (sugerencia:  $\arctan x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$ ).
74.  $\arcsin x$  en potencias de  $x$  (sugerencia: Usar la serie binómica para desarrollar  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , además  $\arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ).
75. Mostrar que a)  $xe^x = \sum \frac{n}{n!} x^n$ . b)  $\sum \frac{n}{n!} = e$ .
76. Mostrar que a)  $(x^2 + x)e^x = \sum \frac{n^2}{n!} x^n$ , b)  $\sum \frac{n^2}{n!} = 2e$ . Obtener c)  $\sum \frac{n^3}{n!} 5e$  y  $\sum \frac{n^4}{n!} 15e$ .

### PROBLEMAS VARIOS SOBRE SERIES DE POTENCIA

77. Utilizando desarrollos en serie, calcular  $\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx = 0.76355$ .
78. Utilizando desarrollos en serie, calcular  $\int_0^{1/2} \frac{dx}{(1+x^4)} = 0.4940$ .

ANEXO  
SOBRE MAXIMO Y MINIMOS  
CALCULO II  
MAXIMOS Y MINIMOS

*” La vida es un problema de optimización con restricciones . Nuestras relaciones con los familiares , compañeros de trabajo o estudio y con nuestros semejantes están con frecuencia determinados por restricciones y por la forma que nosotros optimizamos ciertas funciones objetivos sujetas a estas restricciones. La calidad de vida , que depende de nuestras condiciones mentales y físicas, está de igual forma determinadas por restricciones biológicas y de entorno y por la forma cómo optimizamos ciertas funciones objetivo ” .*

Un problema frecuente en diferentes áreas de aplicación de las matemáticas es la determinación de valores máximos y/o mínimos que toma dicha función.

Debido a las limitaciones o restricciones que se tiene en la vida real respecto de recursos disponibles ; y en general limitaciones de diversa índole, es que el dominio de la función está sujeta a diversas restricciones que matemáticamente se expresan mediante relaciones de igualdad o desigualdad que deben cumplir los puntos a ser considerados para la solución de un problema denominado *problema de optimización* .

Cuando un problema real se puede aproximar en términos de funciones , generalmente a varias variables , las técnicas matemáticas ( basadas sobre todo en el concepto de gradiente y/ o derivadas parciales ) son instrumentos poderosos en la resolución de tales problemas

Es natural suponer que el punto o puntos donde se tiene el máximo ( o mínimo ) de la función depende de la forma algebraica de la función ; pero hay que destacar que también la forma y/o características del dominio de la función influyen de igual manera en cual o cuáles puntos se tendrá la solución .

Mencionemos inicialmente alguna clases de dominios de funciones que se presentan : a) aquellos en los que *todos sus puntos son puntos interiores* . b) aquellos cuyos puntos , algunos son interiores y otros constituyen su *frontera* .

Entre los dos tipos de dominios mencionados , algunos son *acotados* y otros *no acotados* . Los acotados son aquellos que se pueden encerrar en un círculo ,

mientras que los que no es posible encerrarlos se llaman no acotados

Un caso muy especial e importante son aquellos dominios denominados *cerrados y acotados* : son aquellos que son acotados y además *contienen a todos sus puntos frontera* . Es decir que todos sus puntos frontera pertenecen al dominio de la función

En un problema de optimización en general se busca el *máximo ( o mínimo ) global de la función* . El máximo global , por ejemplo , es aquel valor que es el mayor valor de la función en todo el dominio ; de igual forma el mínimo global es aquel valor que es el menor valor de la función en todo el dominio . Por el contrario , se dice que una función toma un *mínimo local ( o máximo local )* en cierto punto , cuando existe un círculo con centro en ese punto la función toma su menor valor ( o mayor valor ) .

En base al significado del vector **gradiente** como vector que da *la dirección y sentido del mayor aumento de la función por unidad de variación y cuyo módulo da el valor de dicha variación* ; es posible resolver el problema indicado casi por completo. Los siguientes criterios nos ayudarán a ese propósito :

#### **CRITERIO 1**

*Si en un punto interior del dominio se tiene ya sea mínimo o máximo **local** , entonces la **gradiente** ( si existe \*) en dicho punto debe ser igual al vector*

cero

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) &= (0, 0) \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

Esto se debe a que si el gradiente en dicho punto fuese diferente de  $(0, 0)$ , entonces se tendrían una dirección que en un sentido aumentaría la función ; y en el otro sentido disminuiría la función ; hecho que no es posible *porque en ese punto, localmente, se da el menor o mayor valor de la función*

(\*) ( El gradiente no existe cuando alguna de las derivadas parciales no existe )

Hay que tomar en cuenta que *si en un punto se tiene que el vector gradiente vale  $(0, 0)$* , no estamos indicado que en dicho punto se da un máximo o mínimo ( local ). Por ejemplo la función  $f(x, y) = x^3 - y^3$ , tiene su gradiente cero en el punto  $(0, 0)$ ; pero en este punto no se tiene ni máximo ni mínimo ( local ). En la dirección horizontal es creciente y en la dirección vertical es decreciente; se dice en estos casos que  $(0, 0)$  es un *punto de silla*.

Este criterio 1, se utiliza más bien para *descartar puntos interiores*: Es decir, **en aquellos puntos interiores del dominio donde la gradiente es distinta del vector cero, no se puede tener ni máximo ni mínimo local**. Los puntos donde vale cero son posibles ( puntos candidatos ) a que en ellos se de máximo o mínimo local.

## CRITERIO 2 ( MULTIPLICADORES DE LAGRANGE )

Si en un punto de la frontera del dominio ( e interior a la frontera \*\* ), cuya ecuación está en la forma  $g(x, y) = 0$ ; se tiene ya sea mínimo o máximo **local**, entonces la **gradiente** ( si existe \*) en dicho punto debe ser perpendicular a dicha frontera. Como  $\left( \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} \right)$ , es también perpendicular a la frontera, se debe tener:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \lambda \left( \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \end{aligned}$$

Esto se debe a que si el gradiente en dicho punto no fuese perpendicular a la frontera , entonces se tendrían una dirección que en un sentido aumentaría la función ; y en el otro sentido disminuiría la función ; hecho que no es posible porque en ese punto , localmente en la frontera , se da el menor o mayor valor de la función

(\*\*) ( *interior a la frontera* , quiere decir , que considerando la frontera como objeto geométrico en dimensión 1 , algunos puntos son *interior a la frontera* y otros *están en la frontera de la frontera*

Hay que tomar en cuenta que si en un punto se tiene que el vector gradiente es perpendicular a la frontera , esto es ;  $\nabla f$  y  $\nabla g$  son paralelas , no estamos indicado que en dicho punto se da un máximo o mínimo ( local ) . Por ejemplo la función  $f(x, y) = x^2 - y^2$  , tiene su gradiente en el punto  $(1, 0)$  perpendicular a la frontera considerándolo como punto de la frontera  $x = 1$  sobre el rectángulo de vértices  $(1, -5)$  ,  $(6, -5)$  ,  $(1, 5)$  y  $(6, 5)$ . Pero en este punto no se da ni máximo ni mínimo local .

Este criterio 1 , se utiliza más bien para *descartar puntos de la frontera* : Es decir, en aquellos puntos de la frontera ( interiores a la frontera ) del dominio donde la gradiente no es paralela al vector gradiente de  $g(x, y) = 0$  es distinta del vector cero , en esos puntos no se puede tener ni máximo ni mínimo local . Los puntos donde se cumple el paralelismo son puntos posibles ( puntos candidatos ) a que en ellos se de máximo o mínimo local .

### CRITERIO 3

Un teorema importante del análisis matemático es aquel que enuncia : " Dada una función  $z = f(x, y)$  , si i)  $f$  es continua (\*\*\*) y el dominio es *cerrado y acotado* , entonces tiene al menos un punto donde se da el máximo ( y un punto al menos donde se da el mínimo ) .



s

Este teorema garantiza la existencia de una solución a nuestro problema y asegura que nuestra búsqueda no es vana

En conclusión una gran parte de la solución es *descartar todos los puntos del dominio , en el interior y en la frontera , donde no puede tenerse máximo o mínimo ( local \*\*\*). Y si se conoce que se tiene máximo global o local la selección del punto buscado se hace entre los candidatos que quedan*

( \*\*\*, el global también es local)